Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

INTERNATIONAL CONFERENCE

SYSTEMS ANALYSIS: MODELING AND CONTROL

in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy

Moscow, January 23–24, 2024

ABSTRACTS

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

посвященная памяти академика А. В. Кряжимского

Москва, 23–24 января 2024 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

МАКС ПРЕСС

Москва – 2024

УДК 519.7
ББК 22.18
М43

https://elibrary.ru/zgerks

Программный комитет:
Ю.С. Осипов (со-председатель), *И.А. Соколов* (со-председатель),
А.А. Давыдов, *А.В. Ильин, Н.Ю. Лукоянов, В.И Максимов., Е.А. Ровенская,*
В.В. Фомичев, А.Г. Ченцов

Организационный комитет:
Н.Л. Григоренко (председатель), *Л.А. Артемьева, А.А. Дряженков,*
С.М. Орлов, С.П. Самсонов, А.И. Смирнов

Ответственный за выпуск *А.И. Смирнов*

М43 **Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А.В. Кряжимского,** Москва, 23–24 января 2024 г. : Тезисы докладов. – Москва : МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2024. – 128 с.
ISBN 978-5-317-07128-8
https://doi.org/10.29003/m3791.978-5-317-07128-8

В сборнике содержатся материалы докладов, представленных на Международной конференции «Системный анализ: моделирование и управление», посвященной памяти академика А.В. Кряжимского, Москва, 23–24 января 2024 г.

Ключевые слова: системный анализ, моделирование, оптимальное управление, численные методы.

Systems Analysis: Modeling and Control: Materials of the International Conference in memory of Academician A.V. Kryazhimskiy, Moscow, January 23–24, 2024 : – Moscow: Lomonosov Moscow State University; MAKS Press, 2024. – 128 p.
ISBN 978-5-317-07128-8

This collection of articles contains materials of the talks presented at the International Conference «Systems Analysis: Modeling and Control» in memory of Academician A.V. Kryazhimskiy, Moscow, January 23–24, 2024.

Keywords: systems analysis, modeling, optimal control, numerical methods.

ISBN 978-5-317-07128-8

СОДЕРЖАНИЕ

Аркадий Викторович Кряжимский 11

Artem Baklanov, Johannes Bednar, Nikolay Khabarov
Pitfalls of Social Cost of Carbon 13

Alexey Davydov, Savva Zosimov
Normal forms for pair of involution of real line with common fixed point and termo-haline oscillations in Welander model 14

Alexey Davydov
Optimal Cyclic Harvesting of Distributed Renewable Resource . . . 15

Sergey Kabanikhin, Maxim Shishlenin
Stability and Regularization of Nonlinear Volterra Operator Equations 16

Aleksandr Kirillov
The method of predator-prey system periodic control preserving the interaction structure 17

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova
Application of the Kantorovich–Galerkin Method to the Problem of Longitudinal Vibrational Rope with Moving Boundary 19

Vladimir V. Mazalov
Stable coalitions in dynamic games 21

Anatoly Manita, Larisa Manita
Stochastic modifications of DeGroot opinion dynamics model 21

Anna Rettieva
Cooperation in Dynamic Multicriteria Games 23

Mariya Ronzhina, Larisa Manita
Spiral-like solutions in optimal control problems with control in a disk 25

Nikita Strelkovskii, Sergey Orlov
Advancing the program packages method for positional control problems with incomplete information 27

Maxim Shishlenin, Sergey Kabanikhin
Inverse Problems of Acoustics and Electrodynamics 29

Абдуллаев У.А., Отениязов Е.Т.
Об возможности математического моделирования системы самоорганизации 30

Абрамова В.В., Самыловский И.А.
Задачи управления группой динамических объектов в гравитационном поле
Optimal control problems related to gravity field located dynamical objects group 32

Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М.
Регуляризованный экстраградиентный метод с отделимым от нуля шагом для решения неравномерно возмущённой квадратичной задачи
A Regularized Extragradient Method with Separable from Zero Step Length for the Solution of the Ununiformly Disturbed Quadratic Problem 33

Асеев А.С., Самсонов С.П.
Метод нахождения границы множества достижимости для негладких управляемых динамических систем на плоскости
Method for finding the boundary of the attainability domain for nonsmooth controlled dynamical systems on the plane 36

Благодатских А.И.
Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования
Simultaneous Multiple Capture in Problems of Group Pursuit . . . 38

Бортаковский А.С.
Быстродействие группы управляемых объектов
Speed of Performance of a Group of Controlled Objects 40

Васин А.А.
Об оптимальном управлении накопителями энергии
Optimal Control of Energy Storage 41

Гаражка И.А.
Управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью, в задаче дифференциальной игры
Control of a nonlinear object linearized by feedback in a differential game problem 43

Гомоюнов М.И.
Оптимальные позиционные стратегии в антагонистических играх для интегральных уравнений Вольтерра
Optimal Feedback Strategies in Zero-Sum Games for Volterra Integral Equations 46

Гончарова М.Н., Самсонов С.П.
Об аналитическом задании множества управляемости для одной системы второго порядка с фазовым ограничением
About Analytic Controllability Set for One State-Constrained Second-Order System 47

Григоренко Н.Л.
Построение управления первого игрока для системы поводыря в нелинейной дифференциальной игре.
Construction of the first player control for a guide system in a nonlinear differential game 49

Данилин А.Р., Шабуров А.А.
Задачи дешевого управления с гладкими ограничениями на управление
Cheap control problems with smooth geometric constraints on control 51

Давыдов А.А., Хачатрян Х.А.
О существовании стационарных состояний в динамике популяций с миграцией и распределенным потомством
On the existence of stationary states in the dynamics of populations with migration and distributed offspring 53

Денисов А.М.
Аппроксимация решений обратных задач для уравнений в частных производных с малым параметром при старших производных
Approximation of solutions to inverse problems for partial differential equations with a small parameter at higher derivatives 54

Денисова Н. И., Фомичев В. В.
Задача построения асимптотического наблюдателя для одного класса нестационарных систем с возмущением
The problem of constructing an asymptotic observer for one class of nonstationary systems via disturbance 55

Дмитрук А.В.
Общий принцип Лагранжа и его применение в оптимальном управлении
A general Lagrange principle and its application to optimal control 57

Едреев В.В.
Автоматическая генерация фронта оптимальных архитектур нейронных сетей алгоритмами многокритериальной оптимизации
Automatic generation of the front of optimal architectural neural networks by multi-objective optimization algorithms 59

Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Смирнова Л.В.
Коалиционно-эффективное равновесие в одной нетрансферабельной игре
Coalition-effective equilibrium in a single nontransferable game . . 62

Зайцев В.А.
Об асимптотической стабилизации нелинейных периодических систем с дискретным временем
On asymptotic stabilization of nonlinear periodic discrete-time sys-

tems 64

Ильин А.В., Фурсов А.С.
О построении цифрового регулятора для переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении
On the construction of a digital controller for a switched linear system with commensurate delays in control 66

Корнеева О.А., Мастерков Ю.В.
Об управляемости одной линейной нестационарной системы
On the controllability of one linear nonstationary system 70

Крупенников Е.А.
Об обратных задачах для управляемых систем со скользящими режимами
To inverse problems of control systems with sliding modes 71

Курина Г.А., Хоай Н.Т.
Асимптотика решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния
Asymptotics of Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation 73

Ливанов Н.Д., Изместьев И.В.
Об одной задаче управления в электросети длинных линий при наличии помех
On a control problem in an electrical network of long lines in the presence of disturbances 75

Локуциевский Л.В.
Асимптотически оптимальное управление периодической струной
Asymptotically optimal control of a closed string 77

Максимов В.И.
Регуляризованная обратная связь в задачах обращения и устойчивого управления
Regularized feedback in inverse and robust control problems 77

Мачтакова А.И., Петров Н.Н.
О некоторых задачах преследования в дифференциальных играх с дробными производными
On some pursuit problems in differential games with fractional derivatives 79

Маштаков А.П.
Субриманова задача на центральном расширении группы движений плоскости
Sub-Riemannian problem on the central extension of the group of

motions of a plane 81

Мельников Н. Б., Ронжина М. И.
Оптимальные траектории с учащающимися переключениями в задаче локальной стабилизации системы шар и балка
Optimal chattering trajectories in local stabilization problem for the ball and beam system 83

Никольский М.С.
О непрерывности времени оптимального быстродействия в линейных задачах оптимального быстродействия
About continuity of optimal time for linear time control problems 85

Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А.
Машина Дубинса: трёхмерный и двумерный варианты множества достижимости при интегральном ограничении на управление
Dubins car: Three-dimensional and two-dimensional variants of the reachable sets with an integral control constraint 87

Петренко И.А., Черевко А.А., Шарифуллина Т.С.
Анализ задачи эмболизации АВМ методами теории оптимального управления
Analysis of AVM embolization problem by optimal control theory methods 89

Петухов В.С., Сачков Ю.Л.
Лоренцева задача на 2-мерном пространстве де Ситтера
Lorentzian problem on 2-dimensional de Sitter space 90

Подобряев А.В.
Сублоренцевы экстремали
Sub-Lorentzian extremals 91

Постнов С.С.
Об особенностях решения задачи оптимального по быстродействию граничного управления для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением
On the Features of the Time-Optimal Boundary Control Problem Solution for the Systems, Described by the Diffusion-Wave Equation 93

Потапов Д.К.
Управление в задаче Штурма–Лиувилля с разрывной правой частью
Control in Sturm–Liouville's Problem with Discontinuous Right-Hand Side 95

Родина Л.И.
О некоторых классах систем дифференциальных уравнений
On Some Classes of Systems of Differential Equations 97

Родина Л.И., Черникова А.В.
Об оптимальной эксплуатации возобновляемого ресурса из структурированной популяции
On optimal exploitation of renewable resource from the structured population 99

Розенберг В.Л.
К задаче гарантирующего управления при дефиците информации для стохастического дифференциального уравнения
On a Guaranteed Control Problem under Uncertainty for a Stochastic Differential Equation 102

Сачков Ю.Л.
Свободные нильпотентные субримановы структуры и их приложения
Free nilpotent sub-Riemannian structures and their applications . 103

Семендяева Н.Л., Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.
Исследование колебательных процессов в кинетической модели трёхкомпонентной химической реакции
Study of Oscillatory Processes in the Kinetic Model of a Three-Component Chemical Reaction 105

Сурков П.Г.
Об одном алгоритме восстановления возмущений в равномерной метрике в системе дробного порядка
On an disturbance resonstructing algorithm in a uniform metric in a fractional order system 107

Точилин П.А., Паршиков М.В.
О вычислении приближенного решения задачи быстродействия с фазовыми ограничениями при помощи случайного дерева
On calculating an approximate solution of time optimal control problem with state constraints using random tree 109

Трубников Г.И.
Численное исследование двумерного множества достижимости машины Дубинса при интегральном квадратичном ограничении на управление
Numerical study of a two-dimensional reachable set of Dubins car with integral quadratic constraint on control 111

Туницкий Д.В.
Эксплуатация возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли
Exploitation of renewable resource distributed on the surface of the Earth 113

Хайлов Е.Н.
Продолжимость решений неавтономных систем квадратичных

дифференциальных уравнений и их применение в задачах оптимального управления
Extensibility of solutions to non-autonomous systems of quadratic differential equations and their application in optimal control problems 115

Хлопин Д.В.
О неустойчивости знака как условии трансверсальности
On unstability of the sign as some transversality condition 117

Ченцов А.Г.
Декомпозиция и динамическое программирование в задачах маршрутизации с ограничениями
Decomposition and dynamic programming in route problems with constraints 119

Ченцов А.Г., Серков Д.А.
Одно свойство непрерывной зависимости множеств в пространстве мер и задача на программный минимакс
One property of continuous dependence of sets in the space of measures and the program minimax problem 121

Чистяков С.В., Васецов М.Е.
Заметки о теории игр
Game Theory Notes 123

Югай Л.П.
Задача уклонения в квазилинейных дифференциальных играх с локально-инерционными управлениями
Evasion problem in quasilinear differential games with locally inertial controls 124

Аркадий Викторович Кряжимский

Аркадий Викторович Кряжимский родился 2 января 1949 года в Циндао, Китай. В 1971 году он окончил математико-механический факультет Уральского государственного университета в Свердловске (теперь Екатеринбург). Под научным руководством Юрия Сергеевича Осипова, А.В. Кряжимский подготовил и защитил (в 1974 году) кандидатскую диссертацию под названием "Некоторые игровые задачи управления", в которой он исследовал дифференциальные игры сближения–уклонения с функциональной целью для систем с запаздыванием. Данное исследование продолжало разработки Ю.С. Осипова в области теории игр для систем управления с запаздывающим аргументом.

А.В. Кряжимский работал в Институте математики и механики Уральского научного центра Российской академии наук в Свердловске с 1972 до начала 1990-х годов. В частности, А.В. Кряжимский разработал реализацию принципа экстремального сдвига Н.Н. Красовского, которая не зависела от специфики фазового пространства системы управления, на основе которой в 1981 году он защитил докторскую диссертацию под названием "Дифференциальные игры для нелипшицевых систем".

В своих дальнейших исследованиях в 1980-х годах, на основе методологии теории позиционных дифференциальных игр, Ю.С. Осипов и А.В. Кряжимский предложили новый подход к решению задач управления с возмущениями. Такие задачи о восстановлении неизвестного переменного входа системы по результатам наблюдения ее траектории получили название задачи динамической регуляризации, а разработанный метод позволил решить задачу устойчивого обращения в режиме реального времени и стал известен как принцип регуляризованного экстремального сдвига.

В середине 1980-х годов А.В. Кряжимский начал исследования, связанные с оборонными проектами. До распада Советского Союза в 1991 году сотрудники отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики, работавшие в секторе, которым руководил А.В. Кряжимский, принимали участие в совместных исследованиях с коллегами из НПО "Энергия" (Королев Московской области) и НПО "Автоматика" (Свердловск). Эти исследования были посвящены динамическим системам с неполной и изменяющейся информацией.

В начале 1990-х годов А.В. Кряжимский был направлен на работу в Международный институт прикладного системного анализа, основанный в результате совместной инициативы СССР и США и находящийся в городе Лаксенбург в Австрии. До конца

2012 года возглавлял программу Динамические системы (позже интегрированную в программу Передового системного анализа). Системный подход к решению сложных междисциплинарных задач с использованием математического моделирования, являющийся характерной чертой института, был естественным и для А.В. Кряжимского. В рамках работы в институте им были проведены интересные и оригинальные исследования ряда актуальных прикладных проблем, включая задачи экономического роста, моделирование динамики инновационного рынка, оптимальную организацию поставок энергии и многие другие задачи.

С 1996 года А.В. Кряжимский также работал в Математическом институте имени Стеклова РАН, сначала ведущим научным сотрудником, а с 1997 года — главным научным сотрудником. Одновременно он преподавал и на кафедре оптимального управления факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Его лекции пользовались большой популярностью у студентов благодаря богатству содержания, информативности и ясности изложения. Не меньшее значение имело и личное обаяние лектора.

Важными чертами А.В. Кряжимского были широкий научный размах и трудолюбие на высочайшем интеллектуальном уровне. Ему удавалось решать задачи из самых разных разделов математики, часто на основе синтеза дисциплин и подходов. Результатом плодотворной работы А.В. Кряжимского и признанием значительного вклада в развитие отечественной науки стало его избрание в Российскую академию наук (член-корреспондент РАН с 1997 года, действительный член РАН с 2006 года).

Талантливый человек талантлив во всем. А.В. Кряжимского с детства привлекала музыка и литература, он был блестящим гитаристом, автором стихов и песен. Аркадий Викторович был отзывчивым и сердечным человеком. Близкие и коллеги отмечали его тактичность, энтузиазм, широкий кругозор и готовность не только делиться своими идеями, но и ценить и обсуждать идеи других людей.

А.В. Кряжимский безвременно и скоропостижно ушел из жизни 3 ноября 2014 года. Его идеи же по-прежнему вдохновляют и развиваются дальше в научных исследованиях его учеников и последователей.

PITFALLS OF SOCIAL COST OF CARBON

Artem Baklanov, Johannes Bednar, Nikolay Khabarov

International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Schlossplatz 1, 2361, Laxenburg, Austria

{baklanov, bednar, khabarov}@iiasa.ac.at

The concept of the Social Cost of Carbon (SCC) as is as it is defined for the DICE model [1] was recently criticized from a "mathematical" standpoint [2,3]. Here we

- recall textbook theory on using Lagrangian multipliers for estimation of the sensitivity of the optimal results in nonlinear optimization;
- highlight potential pitfalls of the standard way of SCC computation that are set up by the theory;
- offer insights to contextualize and build upon the challenging findings in [2,3], enhancing our understanding of SCC computation complexities and the broader application of duals in economic applications.

Bibliography

1. Nordhaus, W. (2013). Integrated Economic and Climate Modeling. Handbook of Computable General Equilibrium Modeling, 1069-1131. https://doi.org/10.1016/b978-0-444-59568-3.00016-x
2. Khabarov, N., Smirnov, A., Obersteiner, M. (2022). Social cost of carbon: A revisit from a systems analysis perspective. Frontiers in Environmental Science, 10. https://doi.org/10.3389/fenvs.2022.923631
3. Khabarov, N., Smirnov, A., Obersteiner, M. (2022). Shadow prices and optimal cost in economic applications. arXiv preprint arXiv:2211.03591.

NORMAL FORMS FOR PAIR OF INVOLUTION OF REAL LINE WITH COMMON FIXED POINT AND TERMO-HALINE OSCILLATIONS IN WELANDER MODEL

Alexey Davydov

Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory 1, Moscow, Russia
NUST MISIS, Leninsky prospect 4, Moscow, Russia

`davydov@mi-ras.ru`

Savva Zosimov

Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory 1, Moscow, Russia

`zosimov.zerkaa.savva@gmail.com`

In the Welander model a homogeneous surface water layer of constant thickness is influenced by the atmosphere above it and the underlying deep water layer with constant temperature and salinity T_A, S_A and T_0, S_0, respectively, [1]. The interaction between the layers is described by Newton's law, while for interaction with the atmosphere the exchange coefficients q_S and q_T for salinity and temperature are constant and satisfy the relation $0 < q_S < q_T$, and for turbulent exchange between two water layers, this coefficient is a function q_0 of the differences in the densities ρ and ρ_0 of the surface and deep layers, respectively. We will call this function *transfer function*; it is nondecreasing, having values being close to zero at significant negative values of this difference, and rapidly growing near zero.

After choosing the temperature, salinity and density of the deep water layer as zero for these indicators, the Wilander model takes the form

$$\begin{cases} \dot{T} = q_T(T_A - T) - q_0(\rho)T \\ \dot{S} = q_S(S_A - S) - q_0(\rho)S \end{cases} \tag{1}$$

where T and S are the temperature and salinity of the surface water layer. We take the dependence of the density of the surface layer of water on its temperature and salinity as a linear function

$$\rho = -\alpha T + \beta S \tag{2}$$

with $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ (as in many other works with similar models, for example, which provides a linear approximation near zero to any differentiable function $\rho = \rho(T, S)$ with zero value at zero and negative and positive derivatives at zero with respect to temperature and salinity, respectively. Also as usually we assume that in the state of equilibrium of the surface water layer with the atmosphere, its temperature and density are higher than the temperature and density of the deep water layer, respectively, i.e. $T_A > 0$ and $-\alpha T_A + \beta S_A > 0$ (see, for example, [2])

It is shown that for typical smooth finite-parametric families of transfer functions with a jump at zero, which are zero for negative values and smooth positive on the non-negative semi-axis, the analysis of the occurrence of thermohaline self-oscillations in the model under study is reduced to the study of the appearance of non-trivial fixed points of the composition of typical finite-parametric smooth families pairs of involutions of a real line with a common fixed point [3]. We also discuss the formal normal form of such a typical pair of involutions.

The study was financially supported by the Russian Science Foundation, project no. 19-11-00223

Bibliography

1. P.A.Welander, A simple heat-salt oscillator//Dyn. Atmos. and Oceans. 1982. V. 6, N 4. P. 233 – 242.
2. A.A.Davydov, N.B.Melnikov, Soft Loss of Stability in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes//Analysis and singularities. Part 2, Collected papers. Dedicated to academician Vladimir Igorevich Arnold on the occasion of his 70th birthday, Trudy Mat. Inst. Steklova, 259, Nauka, MAIK "Nauka/Inteperiodika", M., 2007, 10-19; Proc. Steklov Inst. Math., 259 (2007), 6 – 15.
3. A.A.Davydov, S.O.Zosimov, Typical Occurrence of Self-oscillations in an Ocean Circulation Box Model with Turbulent Fluxes//Optimal Control and Dynamical Systems, Collected papers. On the occasion of the 95th birthday of Academician Revaz Valerianovich Gamkrelidze, Trudy Mat. Inst. Steklova, 321, Steklov Math. Inst., Moscow, 2023, 118-127; Proc. Steklov Inst. Math., 321 (2023), 107 – 116.

OPTIMAL CYCLIC HARVESTING OF DISTRIBUTED RENEWABLE RESOURCE

Alexey Davydov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, A-2361, Austria

davydov@mi-ras.ru

We consider a renewable resource distributed on a closed smooth manifold and its extraction by a controlled machine, which moves periodically along a closed prescribed route and harvests this resource, taking into account the complexity of its detection and/or collection from the current position of the machine [1]. In a general case, the dynamics of the resource recovery process is described by an equation of the Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov and Fisher type in divergent form [2-4]. The time averaged extraction is considered as the objective functional. With natural restrictions on the model parameters, it is shown that there is a movement of the collecting machine that maximizes this functional, that is, delivering sustainable optimal exploitation of the resource on the infinite time interval.

Bibliography

1. A.O.Belyakov, A.A.Davydov, "Optimal Cyclic Harvesting of a Distributed Renewable Resource with Diffusion," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 315, 56 – 64 (2021).
2. A.N.Kolmogorov, I.G.Petrovskii, N.S.Piskunov, "A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem," *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.*, 1, No. 6, 1 – 26 (1937).
3. R.A.Fisher, "The wave of advance of advantageous genes," *Ann. Eugenics.*, 7, No. 4, 355–369 (1937).
4. E.V.Vinnikov, A.A.Davydov, D.V.Tunitsky, "Existence of maximum of time averaged harvesting in the KPP-model on sphere with permanent and impulse collection," *Doklady Rossijskoj Akademii Nauk. Mathematika, Informatika, Processy Upravlenia*, 514, No. 1, 59 – 64, (2023).

STABILITY AND REGULARIZATION OF NONLINEAR VOLTERRA OPERATOR EQUATIONS

Sergey Kabanikhin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia

ksi52@mail.ru

Maxim Shishlenin

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Novosibirsk, 630090, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia

m.a.shishlenin@mail.ru

We discuss several classical and new methods of stability and regularization of nonlinear Volterra operator equations, including Tikhonov-Lavrentiev-Ivanov [1], Hyers-Ulam-Rassias [2] and machine learning approaches. Application to inverse hyperbolic problems and nonlinear Shroedinger equations will be considered.

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2022-281 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Bibliography

1. S. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*, De Gruyter, Germany, (2011).
2. A. Reinfelds, S. Christian, "Hyers-Ulam Stability of Volterra Type Integral Equations on Time Scales," *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 15, No. 1, 39–48 (2020).

THE METHOD OF PREDATOR-PREY SYSTEM PERIODIC CONTROL PRESERVING THE INTERACTION STRUCTURE

Aleksandr Kirillov

Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS, Pushkinskaja str., 11, Petrozavodsk, 185910, Russian Federation

krllv1812@yandex.ru

According to foraging theory [1], food resources consumed by a predator population are distributed over patches. To model the variable dynamics of species interaction and migration between patches in [2, 3] was proposed an approach based on a patch food attractivity function introduced in [4]. When the value of this function, depending on time, becomes less than some threshold predators leave a patch. The latter implies the increasing of preys' growth.

In order to confine the growth of harmful prey population one needs to remove a part of predator population from a patch in such a way that for the remaining part the patch attractivity value becomes more than a threshold. Thus, we have the biocommunity control problem: to obtain a method, time moments and values, of predator population removal. It is worth to note that the procedure of species removal is widely spread in ecology practice (see "Species Survival Commission Guidelines on the Use of Ex situ Management for Species Conservation. Approved by the Steering Committee of the IUCN Species Survival Commission, Tallinn, Estonia, 29 August 2014".). The presented investigation continues [2, 3].

To solve the formulated problem, a periodic control process is constructed. The periodicity of control is natural if we take into account the periodicity of biocommunity free of anthropogenic impact. The patch biocommunity dynamics is described by a three dimensional system of ordinary differential equations: two equations present the Lotka-Volterra system, the third one is responsible for the food attractivity dynamics. The qualitative analysis of dynamics is carried out. An admissible control is a piecewise constant function taking two values, zero and positive. The latter corresponds to a predator species removal. Besides, the patch attractivity should not decrease during such removal. The constraints on admissible control are motivated by the simplicity and possibility of implementation. It is proved that the less anthropogenic load on a patch corresponds to an admissible tangent control the notion of which is introduced in this investigation.

The continuous control dynamical system gives rise to a discrete one generated by circle homeomorphisms. The conditions under which the corresponding discrete system is periodic are obtained and explicit expressions for periods are found. The set of attainability is constructed.

This work is supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00092), https://rscf.ru/project/23-21-00092/

Bibliography

1. D. Stephens, J. Krebs, *Foraging Theory*, Princeton Univ. Press, (1986).
2. A. Kirillov, A.Ivanova, "Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem," *Autom. Remote Control*, 78, No. 8, 1500–1511 (2017).
3. A. Kirillov, "Numerical modeling of a periodic process that preserves the species structure of a biocommunity," *Math. Models Comput. Sim.*, 14, No. 1, 38–46 (2022).
4. A. Kirillov, "Ecological systems with variable dimension," *Surveys Appl. Industr. Math.*, 6, No. 2, 819–836 (1999).

APPLICATION OF THE KANTOROVICH–GALERKIN METHOD TO THE PROBLEM OF LONGITUDINAL VIBRATIONAL ROPE WITH MOVING BOUNDARY

V.L. Litvinov

Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow
Faculty of Mechanics, Samara State Technical University, Samara

vladlitvinov@rambler.ru

K.V. Litvinova

Faculty of Mechanics, Samara State Technical University, Samara
Geological Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow

Using the approximate Kantorovich-Galerkin method, a high-precision solution to the problem of longitudinal vibrations of a lifting rope is found, one end of which is wound on a drum, and a load is attached to the other. Particular attention is paid to the consideration of the most common case in practice, when external disturbances act on moving boundaries. The solution is made in dimensionless variables up to second-order values of smallness relative to small parameters characterizing the speed of motion of the boundary. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the nth dynamic mode are presented. The phenomenon of steady-state resonance and passage through resonance is investigated. The results are presented in the form of a graphical dependence of the maximum amplitude of rope vibrations when passing through resonance versus time.

The range of problems of the dynamics of objects of variable length is associated with the development of the scientific foundations of the strength, reliability and durability of mining machines and mechanisms, hoisting and transport, towing and trawl equipment and other installations using steel ropes as a working element. With increasing depths and speeds of lifts, and an increase in the weight of the end loads, dynamic phenomena come to the fore, both in the rope itself and in the entire lifting installation. The object of study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects of variable length [1–5]. The presented results make it possible at the design stage to prevent the possibility of occurrence of large-amplitude longitudinal vibrations of the load-bearing links of lifting installations.

The method allows us to take into account the effect of environmental resistance forces on the system, bending rigidity, as well as boundary conditions with weak non-stationarity. The mathematical formulation of the problem includes a partial differential equation with respect to the desired displacement function and inhomogeneous boundary conditions. The Kantorovich–Galerkin method allows one to take into account the initial conditions, but they do not affect the resonant properties of linear systems, so they are not taken into account in this case. By introducing a new function into the problem, the boundary conditions are reduced to homogeneous ones. The solution is carried out in dimensionless variables up to second-order values of smallness relative to small parameters characterizing the speed of motion of the boundary and viscoelasticity. The results obtained for the amplitude of oscillations corresponding to the nth dynamic mode are presented. The phenomenon of steady-state resonance and passage through resonance is investigated using numerical methods. A graphical dependence of the maximum amplitude of rope oscillations when passing through resonance is presented depending on the parameter characterizing viscoelasticity based on the Voigt model. The accuracy of the Kantorovich-Galerkin method is assessed.

Bibliography

1. Goroshko O. A., Savin G. N. Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length. Kyiv: Naukova Dumka, 1971. 270 p.
2. Lezhneva A. A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. ANSSSR. Mechanics of solids, 1970. No. 1. pp. 159–161.
3. VesnitskyA. I. Waves in systems with moving boundaries. M.: Fizmatlit, 2001.320 p.
4. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations, Proc. IMM URO RAS, 26, 2020, 188–199.
5. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro-differential equations, Zh. Vychisl. math. and math. Phys., 62:6 (2022), 977–986.

STABLE COALITIONS IN DYNAMIC GAMES

Vladimir V. Mazalov

Institute of Applied Mathematical Research, Karelia Research Center of RAS, Pushkinskaya str. 11, Petrozavodsk, 185910, Russia

vlmazalov@yandex.ru

The main objective of this work is to study the stability of coalition structure in a dynamic game. We introduce a dynamic stable Nash partition concept which is an extension of the well-known concept of stable coalition partitioning for static games.The dynamic stability of the coalition partition means that during the game it is not profitable for players to leave their coalition and join other coalitions. Using examples of popular dynamic games, the conditions under which dynamic stability occurs are found. The issue of dynamic stability of coalition partitioning is also discussed in the procedure of time-consistent imputation distribution procedure for the participants of these coalitions in the process of moving along the optimal trajectory.

Supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00051, https://rscf.ru/project/22-11-00051).

STOCHASTIC MODIFICATIONS OF DEGROOT OPINION DYNAMICS MODEL

Anatoly Manita

Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, Moscow, Russia

manita@mech.math.msu.su

Larisa Manita

HSE University, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, 34 Tallinskaya Ulitsa, Moscow, Russia

lmanita@hse.ru

We propose a stochastic variation of the famous DeGroot model [1] which is a basic Repeated Linear Updating Model, according to the classification of the survey [6]. Originally it was proposed as simple rules for seeking opinion consensus in finite communities of experts. These rules are subsequently repeated in discrete time $t \in \mathbb{Z}_+$. Namely, $\vec{x}(t+1) = W\vec{x}(t)$ where W is a (nonrandom) stochastic matrix and the column vector $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ stands for opinions of experts. Later the basic idea of the DeGroot model proved to be very useful for solving differents problems such as load balancing in distributed systems [3], analysis of some agreement algorithms [7], control and coordination of group of moving objects [5], analysis of opinions in social networks [4, 6] etc. See [8] for an overview of similar models. The basic DeGroot model is purely deterministic but its mathematical study is related to the theory of discrete Markov chains. This is also true for (deterministic) time-varying modifications of the model [2]. The main interest is the problem of consensus. By definition the system $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is reaching consensus iff state $x_j(t)$ of any participant tends to some common value: $\forall j = \overline{1,n} \quad x_j(t) \to c \quad \text{as} \quad t \to \infty$. The subset $S_0 = \{\vec{x}: \ x_1 = \cdots = x_n\} \in \mathbb{R}^n$ is called a consensus subspace. For the DeGroot model all elements of S_0 are fixed points of the dynamics. It is known that the presense of random noise can drastically impact the behavior of opinion dynamics models, (see e.g. [9]). For stochastic modifications of DeGroot rules we cannot expect the convergence to a fixed point. But under suitable regularity assumption the probability law $\mathcal{L}_t = \mathrm{Law}(\vec{x}(t))$ converges to a limit distribution $\mathcal{L}_\infty$ as $t \to \infty$. The main interest of our study are properties of $\mathcal{L}_\infty$, especially for large n.

Let us introduce our stochastic model. There are n individuals with "opinions" $x_j(t) \in \mathbb{R}$, evolving as follows. At time $t+1$

- with probability β_0 all $x_j(t+1) = (W\vec{x}(t))_j$, i.e., all individuals follow the DeGroot rule,
- with probability β_k $x_k(t+1) = \xi_k(t+1)$, for the individual k but $n-1$ other individuals $j \neq k$ follow the DeGroot rule, $k = \overline{1,n}$.

We interpret β_k as the probability of an event that individual k "spontaneously" decides to jump according to its preferred distribution $\mathcal{L}(\xi_k)$ instead of following the DeGroot rules. It is assumed that $\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = 1$ and scalar random variables $\xi_k(t)$, $k = \overline{1,n}$, $t \in \mathbb{N}$, are independent.

We show that for a wide class of $\mathcal{L}(\xi_k)$ the limit distribution $\mathcal{L}_\infty$ exists and is not concentrated in S_0. Moreover, a projection of $\mathcal{L}_\infty$ on S_0 is highly sofisticated. Nethertheless, under some assumptions we calculate basic characteristics of the law $\mathcal{L}_\infty$ and get some asymptotical results when $n \to \infty$. Besides analytical results, we also use computer simulations to illustrate behavior of the system.

Bibliography

1. M. DeGroot, "Reaching a consensus," *Journal of the American Statistical Association*, 69, No. 345, 118–121 (1974).
2. S. Chatterjee, C. Seneta, "Towards Consensus: Some Convergence Theorems on Repeated Averaging," *Journal of Applied Probability*, 14, No. 1, 89–97 (1977).
3. G.V. Cybenko, "Dynamic Load Balancing for Distributed Memory Multiprocessors," *J. Parallel Distributed Comput.* 7, 279–301 (1989).
4. N. Friedkin and E. Johnsen. "Social influence networks and opinion change," *Advances in Group Processes,* 16, 1–29 (1999).

5. A. Jadbabaie, J. Lin and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *in IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, No. 6, 988–1001 (2003).
6. B. Golub, E. Sadler, "Learning In Social Networks," *SSRN Electronic Journal*, 10.2139/ssrn.2919146 (2017).
7. A. Manita, L. Manita, "Stochastic Time Synchronization Models Based on Agreement Algorithms," *Lecture Notes in Computer Science,* 10684, 361–375 (2017).
8. A. Proskurnikov, R. Tempo, "A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks: I,II," *Annual Reviews in Control* (2017, 2018).
9. E. Volkova, A. Manita, and L. Manita, "Hegselmann-Krause model of opinions dynamics of interacting agents with the random noises," *Journal of Physics: Conference Series*, 1163. 012064 (2019).

COOPERATION IN DYNAMIC MULTICRITERIA GAMES

Anna Rettieva

Institute of Applied Mathematical Research of KarRS RAS, 11 Pushkinskaya str., Petrozavodsk, 185910, Russia

annaret@krc.karelia.ru

We consider a dynamic, discrete-time, game model where the players use a common resource and seek to optimize different criteria [5]. To construct a multicriteria Nash equilibrium the bargaining solution is adopted [2]. To design a multicriteria cooperative equilibrium, a modified bargaining scheme [4] that guarantees the fulfillment of rationality conditions is applied. To stabilize the multicriteria cooperative solution a time-consistent payoff distribution procedure [1,3] is constructed.

Consider a multicriteria dynamic game with finite horizon in discrete time. Let $N = \{1, \dots, n\}$ players exploit a common resource for different goals. The state dynamics is in the form

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt}) \,, \ \ x_0 = x \,,$$

where $x_t \geqslant 0$ is the resource size at time $t \geqslant 0$, $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})$ denotes the natural growth function, and $u_{it} \geqslant 0$ gives the exploitation rate of player i at time t, $i \in N$.

Denote $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})$. Each player has k objectives to optimize. The vector payoff functions of the players on a finite planning horizon $[0,m]$ have the form

$$J_i = \left(\begin{array}{c} J_i^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^1(u_t) \\ \dots \\ J_i^k = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^k(u_t) \end{array} \right), \, i \in N \,, \tag{1}$$

where $g_i^j(u_t) \geqslant 0$ gives the instantaneous utility, $j = 1, \dots, k$, $i \in N$, $\delta \in (0,1)$ denotes the discount factor.

First, we construct a multicriteria Nash equilibrium strategies and payoffs $J_i^{jN}(u_t^N)$, $i \in N$, $j = 1, \dots, k$ applying the modified bargaining approach [2]. Then, we determine the cooperative behavior applying the modified bargaining solution that combines compromise programming and the Nash bargaining scheme. The status quo points are the noncooperative payoffs obtained by the players using the multicriteria Nash equilibrium strategies u_t^N:

$$\begin{aligned} &(J_1^{1c}(u_t^c) - J_1^{1N}(u_t^N)) \cdot \ldots \cdot (J_1^{kc}(u_t^c) - J_1^{kN}(u_t^N)) + \ldots \\ &+(J_n^{1c}(u_t^c) - J_n^{1N}(u_t^N)) \cdot \ldots \cdot (J_n^{kc}(u_t^c) - J_n^{kN}(u_t^N)) = \\ &= \max_{u_t} \Big[(\sum_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t) - J_1^{1N}(u_t^N)) \cdot \ldots \cdot (\sum_{t=0}^{m} \delta^t g_1^k(u_t) - J_1^{kN}(u_t^N)) + \ldots \\ &+(\sum_{t=0}^{m} \delta^t g_n^1(u_t) - J_n^{1N}(u_t^N)) \cdot \ldots \cdot (\sum_{t=0}^{m} \delta^t g_n^k(u_t) - J_n^{kN}(u_t^N)) \Big] \,. \end{aligned}$$

It was shown [4] that this solution concept guarantees the rationality of cooperative behavior as the cooperative payoffs of the players are greater than or equal to the multicriteria Nash payoffs.

To stabilize the cooperative behavior in dynamic multicriteria games the time-consistent payoff distribution procedure is adopted [1,3].

Bibliography

1. L.A. Petrosjan, "Stable solutions of differential games with many participants," *Viestn. Leningr. Univ.*, 19, 46–52 (1977).
2. A.N. Rettieva, "Equilibria in dynamic multicriteria games," *Int. Game Theory Rev.*, 19(1), 1750002 (2017).
3. A. Rettieva, "Rational behavior in dynamic multicriteria games," *Mathematics*, 8, 1485 (2020).
4. A.N. Rettieva, "Dynamic multicriteria games with asymmetric players," *J. Glob. Optim.*, 83, 521–537 (2022).
5. L.S. Shapley, "Equilibrium points in games with vector payoffs," *Naval Res. Log. Quart.*, 6, 57–61 (1959).

SPIRAL-LIKE SOLUTIONS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONTROL IN A DISK

Mariya Ronzhina

National University of Oil and Gas "Gubkin University", 65 Leninsky Prospekt, Moscow, 119991, Russia

ronzhina.m@gubkin.ru

Larisa Manita

HSE University, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, 34 Tallinskaya Ulitsa, 123458, Moscow, Russia

lmanita@hse.ru

Second-order singular regimes are typical in optimal control problems affine in two-dimensional control $u = (u_1, u_2)$. The Hamiltonian of the Pontryagin maximum principle has the form

$$H(q,p) = H_0(q,p) + H_1(q,p)u_1^0 + H_2(q,p)u_2^0, \tag{1}$$

where $q(t) \in \mathbb{R}^n$ and $p(t) \in (\mathbb{R}^n)^*$.

In [1] we studied the behaviour of extremals in a neighbourhood of a singular second order regime for Hamiltonian systems of high dimension ($n \geqslant 16$) and with the control in a disk. We proved that there exists a family of extremals in the form of logarithmic spirals. These extremals reach the singular surface in a finite time, while the control performs an infinite number of rotations around the circle. For small-dimensional Hamiltonian systems, solutions in the form of logarithmic spirals have been found only for some specific optimal control problems [2]–[5].

We study the problem

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t)\rangle \, dt \to \inf, \ \ \dot{x} = y, \ \dot{y} = Kx + u, \ \ \|u\| \leqslant 1, \ \ x, \, y, \, u \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

where K is an arbitrary non-degenerate 2×2-matrix. The origin is the unique second-order singular solution for (2).

Denote coordinates $z_m \in \mathbb{R}^2, \ m = \overline{1,4}$:

$$z_{1i} = H_i, \ z_{2i} = (\mathrm{ad} H_0) H_i, \ z_{3i} = (\mathrm{ad} H_0)^2 H_i, \ z_{4i} = (\mathrm{ad} H_0)^3 H_i, \quad i = 1, 2.$$

The Hamiltonian system for (2) in coordinates z_m has the form

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = z_3,\ \dot{z}_3 = z_4, \\ &\dot{z}_4 = -u - KK^T z_1 + (K + K^T) z_3,\ u = z_1 / \|z_1\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Theorem [5] *In a sufficiently small neighbourhood of the origin there is a family of spiral-like solutions of (3)*

$$\begin{aligned} z_m(t) &= k_m(t)(T-t)^{5-m} e^{i\alpha \ln|T-t|} e^{i\varphi_m(t)}, \quad m = \overline{1,4}, \\ u(t) &= e^{i\alpha \ln|T-t|} e^{i\varphi_0(t)}, \qquad t \leqslant T, \\ z_m(t) &= u(t) = 0, \qquad t \geqslant T. \end{aligned}$$

Here $k_m(t), \varphi_m(t)$ and $\varphi_0(t)$ are bounded, $\alpha = \pm\sqrt{5}$.

The constructed solutions hit the origin in a finite time, while the control performs an infinite number of rotations around the circle. This result is the generalization of the results obtained in [3].

Bibliography

1. Ronzhina, M. I., Manita, L. A. and Lokutsievskiy, L. V., "Neighborhood of the second-order singular regime in problems with control in a disk," *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 315, 209–222 (2021).
2. M.I. Zelikin, V.F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering*, Boston: Birkhäuser, (1994)
3. L.A. Manita, M.I. Ronzhina, "Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 27, No. 6, 3325–3343 (2022).
4. M.I. Ronzhina, L.A. Manita, "Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem," *Regular and Chaotic Dynamics*, 28, No. 2, 148–161 (2023).
5. M.I. Ronzhina, L.A. Manita, "Logarithmic spirals in optimal control problems with control in a disk," *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, Accepted, (2024).

ADVANCING THE PROGRAM PACKAGES METHOD FOR POSITIONAL CONTROL PROBLEMS WITH INCOMPLETE INFORMATION

Nikita Strelkovskii

International Institute for Applied Systems Analysis, Schlossplatz, 1, Laxenburg, 2361, Austria

strelkon@iiasa.ac.at

Sergey Orlov

Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskiye Gory, 1-52, Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Schlossplatz, 1, Laxenburg, 2361, Austria

sergey.orlov@cs.msu.su

Our presentation provides an overview of the program package method, a novel contribution to guaranteed control theory introduced by academicians Yu. S. Osipov and A. V. Kryazhimskiy in the late 2000s. The concept of program packages was developed to address problems of guaranteed guidance of dynamical systems amid incomplete information [1]. The original problem setting was dedicated to guaranteed guidance of a controlled system onto a given target set at a predefined fixed time with incomplete information about its current phase state [1]. The originators of the method further developed it for assessing the solvability of a guaranteed guidance problem given a finite set of initial positions of the controlled system [2]. Then a solvability criterion for a problem of guaranteed closed-loop guidance onto a target set at a predefined time for linear control systems with a linear observed signal was established [3]. Under the assumption of convexity of the target set, the original closed-loop guidance problem was reduced to a problem of open-loop guidance of an extended control system, which is essentially a finite-dimensional convex optimization problem of a higher dimension [4].

Based on these results, a structural algorithm for constructing a guiding program package and the corresponding guiding positional strategy was developed using the proven equivalence of the guaranteed positional (closed-loop) guidance, package guidance, and extended program (open-loop) guidance problems [6]. This algorithm was implemented numerically for the case of regular clusters of the initial positions set of the controlled system using a modification of the subsequent approximations method in extended phase space

[7]. The challenging case when the initial positions set has singular clusters was addressed by perturbing the original extended program guidance problem and solving it for a smoothed control set [8]. The motions of the original and perturbed problems were proven to be close to each other at the terminal time. For the case of an extended target set with a nonempty interior, it was shown that the developed algorithm for the perturbed problem yields a solution to the extended program guidance problem that precisely guides the system to the target set.

The program packages method implementation for linear systems was augmented to provide a solution for a closed-loop guidance problem onto one of the given convex target sets *by* a predefined time [5], including also a case when the linear control system contains a delay [10]. Furthermore, the program packages method was also customized for a closed-loop terminal control problem [9], which was proven to be reduced to a finite-dimensional open-loop terminal control problem that can be solved using a numerical algorithm [9].

The program packages method was also applied to problems of guidance to a system of target sets [11], and to the guaranteed control problem for a linear stochastic differential equation [12]. One of the prospective directions of the method development can be an extension of the method to non-linear systems, see, for example, [13].

Bibliography

1. Yu. S. Osipov, "Control packages: an approach to solution of positional control problems with incomplete information," *Russian Math. Surveys*, 61, No. 4, 611–661 (2006).
2. A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov, "Idealized program packages and problems of positional control with incomplete information," *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 268, Suppl. 1, S155–S174 (2009).
3. A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov, "On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 277, 144–159 (2012).
4. A. V. Kryazhimskiy, N. V. Strelkovskii, "An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems," *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 291, Suppl. 1, 113–127 (2015).
5. A. V. Kryazhimskiy, N. V. Strelkovskii, "A problem of guaranteed closed-loop guidance by a fixed time for a linear control system with incomplete information. Program solvability criterion," *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 20, No. 4, 168–177 (2014).
6. N. V. Strelkovskii, "Constructing a strategy for the guaranteed positioning guidance of a linear controlled system with incomplete data," *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 39, No. 3, 126–134 (2015).

7. S. M. Orlov, N. V. Strelkovskii, “Algorithm for Constructing a Guaranteeing Program Package in a Control Problem with Incomplete Information,” *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 42, No. 2, 69–79 (2018).
8. S. M. Orlov, N. V. Strelkovskii, “Calculation of elements of a guiding program package for singular clusters of the set of initial states in the package guidance problem,” *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 308, Suppl. 1, S163–S177 (2020).
9. S. M. Orlov, N. V. Strelkovskii, “Program Packages Method for Solution of a Linear Terminal Control Problem with Incomplete Information,” In: *Stability, Control and Differential Games*, 213–223, Springer, (2020).
10. P. G. Surkov, “The problem of closed-loop guidance by a given time for a linear control system with delay,” *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 296, Suppl. 1, 218–227 (2017).
11. V. I. Maksimov, P. G. Surkov, “On the solvability of the problem of guaranteed package guidance to a system of target sets,” *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 27, No. 3, 344–354 (2017).
12. V. L. Rozenberg, “A guaranteed control problem for a linear stochastic differential equation,” *Ural Math. J.*, 1, No. 1, 68–82 (2015).
13. N. L. Grigorenko, A. E. Rumyantsev, “On a class of control problems with incomplete information,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 291, 68-77 (2015).

INVERSE PROBLEMS OF ACOUSTICS AND ELECTRODYNAMICS

Maxim Shishlenin, Sergey Kabanikhin

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Novosibirsk, 630090, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia

{m.a.shishlenin, ksi52}@mail.ru

We investigate the inverse problems of acoustics and electrodynamics. We apply wave and diffusion additional information for inverse problem solution [1]. The inverse problem for wave equation (wave approximation), inverse problem for diffusion equation (diffusion approximation) and inverse problem with combined data of wave and diffusion. Such problems arise in electroacoustic tomography [4] and GPR studies [3, 5]. We analyse the ill-posednes of the inverse problem by singular value decomposition [2]. It was shown that the involvement of data from different physical processes makes it possible to improve the stability of the inverse problem.

Bibliography

1. M. Epov, I. Yeltsov, S. Kabanikhin, M. Shishlenin, “Combined formulation of two inverse problems of geoelectrics,” Siberian Electronic Mathematical Reports, 8, 394–399 (2011).
2. S. Kabanikhin, Y. Gasimov, D. Nurseitov, M. Shishlenin, B. Sholpanbaev, S. Kasenov, “Regularization of the continuation problem for elliptic equations,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21, No. 6, 871–884 (2013).
3. S. Kabanikhin, D. Nurseitov, M. Shishlenin, B. Sholpanbaev, “Inverse Problems for the Ground Penetrating Radar,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21, No. 6, 885–892 (2013).
4. S. Kabanikhin, D. Klyuchinskiy, N. Novikov, M. Shishlenin, “Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws,“ *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 8, No. 2, 287–297 (2020).
5. M. Shishlenin, A. Shakhatova, T. Mirgalikyzy, “Recovering Of The Reservoir Conductivity By Measurements On The Surface Using GPR Data,” *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 11, No. 1, 124–138 (2023).

ОБ ВОЗМОЖНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ

Абдуллаев У.А.

Каракалпакскии филиал Академии наук Узбекистана, Нукус, Узбекистан

abdullaev.ulmas@mail.ru

Отениязов Е.Т.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

erkinote@mail.ru.ru

Создание и совершенствование самоорганизующейся системы торгового предприятия на основе информационных технологий и математических моделей является актуальным вопросом на сегодняшний день. Спрос на продукт сначала медленный, затем высокий, а затем снова замедляется, этот процесс можно принимать как продолжительность жизни продукта. После того, как продукт реализуется на рынке, он устанавливает свои позиции, и спрос может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от качества товара. Независимо от того, какую продолжительность жизни он имеет в целом (с небольшими интервалами), спрос будет расти, а позже уменьшаться. С этой целью большинство торговых аналитиков анализируют темпы роста и пытаются получить прогнозные показатели, создавая свои математические модели. В этой работе мы предполагаем что обеспеченность товаром y подчиняется интегральному логарифмически нормальному закону

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(lnz-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dz \qquad (1)$$

где $y(t)$ — обеспеченность товаром к моменту времени t; α, σ - неопределенные параметры функции. Если мы заменим $x = \frac{lnz}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma}$ то получим интеграл Гаусса, для которого составлены таблицы значений. Для определения α, σ применяют формулу $x_t = \frac{lnz}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma}$ зная значения $y(t)$ за прошлые годы $t = 1, 2, ...m$, из таблиц для интеграла Гаусса находят x_t. Обозначив, $a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\alpha}{\sigma}$ получают $x_t = alnt - b$. Таким образом, можно установить корреляционную связь между параметрами a, b.

Предположим, что обеспеченность товара в момент времени t не является полностью определенной как выше сказанное, а зависит от некоторых случайных воздействий. Для этого случая вводится стохастическая модель роста обеспеченности товара.

Пусть задача самоорганизующейся системы (система обеспеченности) сформулирована следующим образом[1]:

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = \omega(t)Y(t)(1 + Y(t) - \int_0^t Y(s)ds) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

где $Y(t)$ количество спроса товара в момент времени t, $Y(0)$ — начальное число в момент времени $t = 0$, $\omega(t)$ — шум в момент времени t.

Теорема. Пусть $Y(t) = \int_0^t Y(s)ds$ тогда задача (2) имеет решение

$$Y(t) = Y(0)\exp\left(\int_0^t ((\omega(s) - \frac{1}{2}\lambda^2(s))ds + \int_0^t \lambda(s)dW(s))\right)$$

где $\omega(t) = \omega_1(t) + \lambda(t)\frac{dW(t)}{dt}$ — шум.

Пусть в задаче (2) интеграл не определен аналитически, тогда мы решим задачу следующим алгоритмом:

- Используем стохастический θ метод[3] для (2).
- Используем эйлеровскую аппроксимацию [2].
- Смоделируем (2) задачу в R и получим результат.

Литература

1. Bernt Oksendal., “Stochastic Differential Equations and Introduction with Applications.” *Springer.*, - 2003. - 410 p.
2. Партасарати К., *Введение в теорию вероятностей и теорию меры.*, Пер. с анг/Под ред. В.В. Сазонова., - М.: Мир. - 1983. - 351с.
3. Peng Hu and Chengming Huang., “The Stochastic θ-Method for Nonlinear Stochastic Volterra Integro-Differential Equations.” *Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 583930, 13 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/583930Accepted.*

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS RELATED TO GRAVITY FIELD LOCATED DYNAMICAL OBJECTS GROUP

Абрамова В.В., Самыловский И.А.

ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1с52, г. Москва, 119234, Россия

{varvara.abramova, ivan.samylovskiy}@cosmos.msu.ru

Доклад посвящен теоретическим и прикладным аспектам формирования и поддержания группировок малых космических аппаратов в околоземном пространстве. Соответствующие задачи в настоящее время рассматриваются в мире как приоритетные при переходе от единичных «крупных» аппаратов к группировкам малых аппаратов различного назначения и при построении сервисов на их основе.

В «теоретической» части мы рассматриваем задачу оптимального управления, в которой управляемая система декомпозируется на подсистемы, соответствующие отдельным группам космических аппаратов, движущимся вблизи друг друга. При анализе таких систем возможно применение подхода с использованием виртуальных контейнеров, в частности эллипсоидальных, когда контейнер соответствует одной спутниковой подсистеме. После построения стратегии управления контейнером, возможно построение управлений для элементов соответствующей подсистемы. Управление контейнером происходит за счет изменения конфигурации (объема и ориентации) и расположения центра контейнера в пространстве, с учетом ограничений на мгновенные скорости движения исходных объектов, космических аппаратов.

Переход от исходной постановки к задаче управления эллипсоидами позволяет сократить вычислительную сложность и учесть специфику движения отдельных подсистем.

Кроме того, рассматривается задача формирования группировки как задача с промежуточными ограничениями, а также задача удержания объектов на безопасных дистанциях как задача с максиминным функционалом.

Предполагается, что подходы, используемые для исследования спутниковой группировки, могут быть применены и для других управляемых систем ОДУ в задачах различных типов.

Литература

1. Samylovskiy I.A, Abramova V.V, Filippov A.A, “Optimal Control Problems and Cross-Platform Instrumental Software Related to Constellation Cooperative Control”, *CoDIT 2023 Book of Abstracts*, 1–5 (2023).
2. Samylovskiy I.A, Abramova V.V, Filippov A.A, “On the stationarity conditions in an optimal control problem related to autonomous objects group”, *XLV ACADEMIC SPACE CONFERENCE, DEDICATED TO THE MEMORY OF ACADEMICIAN S.P. KOROLEV AND OTHER OUTSTANDING NATIONAL SCIENTISTS – PIONEERS OF SPACE EXPLORATION*, 1–7 (2023).

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С ОТДЕЛИМЫМ ОТ НУЛЯ ШАГОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНО ВОЗМУЩЁННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

A REGULARIZED EXTRAGRADIENT METHOD WITH SEPARABLE FROM ZERO STEP LENGTH FOR THE SOLUTION OF THE UNUNIFORMLY DISTURBED QUADRATIC PROBLEM

Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, Москва, 119991, Российская Федерация

artemieva.luda@gmail.com

В докладе рассматривается задача квадратичной минимизации

$$\|\mathcal{A}u - f\|_F^2 \to \min_{u \in U}, \quad U = \{u \in U_0 \mid \mathcal{B}u = g,\ \|\mathcal{Q}u - w\|_W^2 \leqslant R^2\}, \tag{1}$$

где $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(H \to W)$ — заданные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовых пространствах H, F, G, W. Элементы $f \in F$, $g \in G$, $w \in W$, число $R > 0$ и выпуклое замкнутое множество $U_0 \subset H$ также считаются заданными. Требуется найти какой-нибудь элемент $u_* \in U$, доставляющий минимум в задаче (1).

Предполагается, что вместо точных данных известны их приближения $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\mathcal{B}_n \in \mathcal{L}(H \to G)$, $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{L}(H \to W)$, $f_n \in F$, $g_n \in G$, $w_n \in W$, $R_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Для описания соответствующих условий аппроксимации вводятся вспомогательные гильбертовы пространства H^-, F^+, G^+, W^+, связанные с исходными пространствами непрерывными всюду плотными вложениями $H^- \subset H$, $F \subset F^+$, $G \subset G^+$, $W \subset W^+$. Считается, что известны уровни прогрешностей h_n^-, h_n^+, σ_n, σ_n^+ в следующих оценках:

$$\begin{gathered}
\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \to F)} \leqslant h_n^-\,, \quad \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \to F^+)} \leqslant h_n^+\,, \\
\|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H^- \to G)} \leqslant h_n^-\,, \quad \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \to G^+)} \leqslant h_n^+\,, \\
\|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H^- \to W)} \leqslant h_n^-\,, \quad \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H \to W^+)} \leqslant h_n^+\,, \\
\|f_n - f\|_F \leqslant \sigma_n\,, \quad \|f_n - f\|_{F^+} \leqslant \sigma_n^+\,, \quad \|g_n - g\|_G \leqslant \sigma_n\,, \\
\|g_n - g\|_{G^+} \leqslant \sigma_n^+\,, \quad \|w_n - w\|_W \leqslant \sigma_n\,, \quad |R_n - R| \leqslant \sigma_n\,,
\end{gathered} \tag{2}$$

и что $h_n^-, h_n^+, \sigma_n, \sigma_n^+ \to 0$ при $n \to \infty$. В отличие от классических оценок такого вида [1], операторные нормы в (2) являются более слабыми, что расширяет область обоснованного применения предлагаемого метода.

Введём обозначения для приближённых функционалов Тихонова с параметрами регуляризации $\alpha_n^-, \alpha_n^+ > 0$:

$$\begin{gathered}
t_n^-(v) = \|\mathcal{A}_n u - f_n\|_F^2 + \langle \lambda, \mathcal{B}_n u - g_n \rangle_G + \mu \left(\|\mathcal{Q}_n u - w_n\|_W^2 - R_n^2 \right) + \\
+ \alpha_n^- \|u\|_{H^-}^2 - \alpha_n^- \|(\lambda, \mu)\|_{G \times \mathbb{R}}^2\,, \quad v = (u, \lambda, \mu) \in H^- \times G \times \mathbb{R}, \\
t_n^+(v) = \|\mathcal{A}_n u - f_n - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}_n u - w_n - \varphi\|_{W^+}^2 + \\
+ \langle \lambda, \mathcal{B}_n u - g_n \rangle_{G^+} + \mu_1 \left(\|\psi\|_F^2 - d_n^2 \right) + \mu_2 \left(\|\varphi\|_W^2 - R_n^2 \right) + \\
+ \alpha_n^+ \|(u, \psi, \varphi)\|_{H \times F \times W}^2 - \alpha_n^+ \|(\lambda, \mu_1, \mu_2)\|_{G^+ \times \mathbb{R}^2}^2\,, \\
v = (u, \psi, \varphi, \lambda, \mu_1, \mu_2) \in H \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}^2,
\end{gathered} \tag{3}$$

и следующих векторов, составленных из их частных производных:

$$\nabla_{\pm} t_n^-(v) = \left(\frac{\partial t_n^-(v)}{\partial u}, -\frac{\partial t_n^-(v)}{\partial \lambda}, -\frac{\partial t_n^-(v)}{\partial \mu} \right),$$

$$\nabla_{\pm} t_n^+(v) = \left(\frac{\partial t_n^+(v)}{\partial u}, \frac{\partial t_n^+(v)}{\partial \psi}, \frac{\partial t_n^+(v)}{\partial \varphi}, -\frac{\partial t_n^+(v)}{\partial \lambda}, -\frac{\partial t_n^+(v)}{\partial \mu_1}, -\frac{\partial t_n^+(v)}{\partial \mu_2} \right).$$

Для решения задачи (1) в предположениях (2) предлагается модификация экстраградиентного метода [2], в которой строятся последовательности $\{v_n^-\}$, $\{\overline{v}_n^-\}$, $\{v_n^+\}$, $\{\overline{v}_n^+\}$ по следующим правилам:

$$\overline{v}_n^- = \mathcal{P}_{V_0^-}\left(v_n^- - \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(v_n^-)\right), \quad v_{n+1}^- = \mathcal{P}_{V_0^-}\left(v_n^- - \beta_n^- \nabla_{\pm} t_n^-(\overline{v}_n^-)\right),$$
$$\overline{v}_n^+ = \mathcal{P}_{V_0^+}\left(v_n^+ - \beta_n^+ \nabla_{\pm} t_n^+(v_n^+)\right), \quad v_{n+1}^+ = \mathcal{P}_{V_0^+}\left(v_n^+ - \beta_n^+ \nabla_{\pm} t_n^+(\overline{v}_n^+)\right),$$

где $\mathcal{P}_{V_0^-}$, $\mathcal{P}_{V_0^+}$ — операторы проектирования на множества $V_0^- = (U_0 \cap H^-) \times G \times \mathbb{R}_+$ и $V_0^+ = U_0 \times F \times W \times G^+ \times \mathbb{R}_+^2$ соответственно. Заметим, что значения d_n в (3) явно выражаются через v_n^-.

Основным результатом является сильная сходимость в H первых компонент u_n^+ векторов v_n^+ к некоторому решению u_* исходной задачи (1). В отличие от [3], предлагаемый здесь подход не требует от шагов градиентного метода β_n^-, β_n^+ обязательного стремления к нулю.

Литература

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г., *Нелинейные некорректные задачи*, Курс, (2017).
2. Васильев Ф.П., *Методы оптимизации*, МЦНМО, (2011).
3. Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М., “О задаче квадратичной минимизации с неравномерными возмущениями в критерии и ограничениях,” *Тр. ИММ УрО РАН*, 27, No. 2, 19–34 (2021).

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

METHOD FOR FINDING THE BOUNDARY OF THE ATTAINABILITY DOMAIN FOR NONSMOOTH CONTROLLED DYNAMICAL SYSTEMS ON THE PLANE

Асеев А.С., Самсонов С.П.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы д. 1, Москва, Россия

anton.ser.as@gmail.com, samsonov@cs.msu.ru

Пусть заданы $T > 0$ и непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^2$. На интервале времени $[0, T]$ рассмотрим в G следующую управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + f_1(x(t))u(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$u(t) \in [0, 1]. \tag{2}$$

Здесь $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, $x_0 \in G$ — заданное начальное состояние системы, $u \in \mathbb{R}^1$ — управляющий параметр. Будем считать, что векторные функции $f_i\colon G \to \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1$, удовлетворяют условию Липшица с постоянной $L > 0$. Кроме того, будем предполагать, что векторная функция $f_1(\cdot)$ не обращается в нуль ни в одной точке $x \in G$. В качестве *допустимых управлений* системы (1) будем рассматривать все измеримые по Лебегу функции $u\colon [0, T] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие при всех $t \in [0, T]$ ограничению (2).

Пусть координаты $f_i^j(\cdot)$, $j = 1, 2$, векторных функций $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, фигурирующих в описании системы (1), имеют вид

$$f_i^j(x) = \max\{\phi_{i,1}^j(x), \phi_{i,2}^j(x)\}, \tag{3}$$

где $\phi_{i,q}^j(\cdot)$, $q = 1, 2,$ — липшицевые с константой L и гладкие (класса C^k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, т.е. k раз непрерывно дифференцируемые) в G скалярные функции.

Лемма 1. Пусть скалярная функция $\phi\colon G \to \mathbb{R}^1$ принадлежит классу C^k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, в G, а функция $h(\cdot)$ определяется на множестве G равенством

$$h(x) = \max\{0, \phi(x)\}. \tag{4}$$

Тогда функция $h^{k+1}(\cdot)$ принадлежит классу C^k в G. Кроме того для любого $x \in G$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} h^{k+1}(x) = (k+1) h^k(x) \phi_x(x). \tag{5}$$

Здесь $\phi_x(x)$ обозначает градиент функции $\phi(\cdot)$ в точке $x \in G$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда, для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, и произвольного $\varepsilon > 0$ функция $h_{\varepsilon,k}(\cdot)$, определенная для всех $x \in G$ равенством

$$h_{\varepsilon,k}(x) = \left(h^{k+1}(x) + \varepsilon \right)^{\frac{1}{k+1}}, \tag{6}$$

принадлежит классу C^k в G. Кроме того, для любого $x \in G$ имеем

$$0 < h_{\varepsilon,k}(x) - h(x) \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{k+1}}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь следующую управляемую систему с параметром $\varepsilon > 0$:

$$\dot{x}(t) = f_{0,\varepsilon}(x(t)) + F_\varepsilon(x) v(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{8}$$

$$v(t) \in U_\varepsilon, \ \ U_\varepsilon = \left\{ v = (v^1, v^2) : \ \left(\frac{v^1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{\varepsilon} \right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \right\}. \tag{9}$$

Функция $f_{0,\varepsilon}\colon G \to \mathbb{R}^2$ и невырожденная матричная функция $F_\varepsilon\colon G \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $F_\varepsilon(\cdot) = (f_{1,\varepsilon}(\cdot), f_{2,\varepsilon}(\cdot))$, определены для всех достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ и принадлежат классу C^k, $k \geqslant 1$, в G.

Лемма 2. Пусть векторные функции $f_{i,\varepsilon}(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$, принадлежат классу C^k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, в G. Тогда гамильтониан $H_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ системы (8) принадлежит тому же классу гладкости C^k в $G \times \left\{ \mathbb{R}^2 \setminus 0 \right\}$.

Опираясь на полученные результаты предложен метод приближенного нахождения границы множества достижимости для класса негладких управляемых динамических систем на плоскости, возникающих в экономике. Метод основан на явной процедуре сглаживания системы и применении аппарата принципа максимума Понтрягина. Рассмотрена задача построения границы множества достижимости для управляемой версии известной модели бизнес-цикла Калдора [1].

Литература

1. Асеев А.С. “Оптимальные стационарные режимы в управляемой модели бизнес-цикла Калдора”, *Матем. моделирование*, 31, No. 2. 33–47 (2019).

ОДНОВРЕМЕННАЯ МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

SIMULTANEOUS MULTIPLE CAPTURE IN PROBLEMS OF GROUP PURSUIT

Благодатских А.И.

Удмуртский государственный университет,
ул. Университетская, 1, г. Ижевск, 426034, Россия

aiblag@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$
\begin{array}{lllll}
P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\
E & : & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0,
\end{array}
$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь и далее, $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ компактом в $\mathbb{R}^k$; $I(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$; $S(c, r)$ — замкнутый шар с центром в точке $c \in \mathbb{R}^k$ радиуса r; $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$; $\mathcal{I}$ — единичная матрица.

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q < \ldots$ — интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

Кусочно-программной стратегией убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений

$$
v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots
$$

(если момент θ_{q+1} не определен, то есть θ_q — последняя точка разбиения σ, то считаем $\theta_{q+1} = \infty$).

Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений

$$u_i(t) = u_i\big(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y(\theta_q), v(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})\big), t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), q = 0, 1, \ldots$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\}.$$

Определение 1. В игре Γ возможна *b-кратная поимка* если существует такой момент T_0, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 2 [*Определение* 3]. В игре Γ возможна *нестрогая одновременная b-кратная поимка* [*одновременная b-кратная поимка*], если существует такой момент T_0, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающего E существует такая кусочно-программная контрстратегия преследователей P_i, $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda$$
$$[x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda].$$

Предположение 1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что $B(t)(U(t)+g(t)) = S(0, 1)$, $t \in [t_0, \infty)$.

Условие 1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1, матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора и $U(t) = U = \text{const}$. Тогда условие 1 является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре Γ.

Во время доклада планируется сформулировать и более общие условия разрешимости игры Γ, а также рассмотреть другие постановки задач об одновременной многократной поимке.

Литература

1. Григоренко Н.Л., *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*, М.: Изд-во МГУ (1990).
2. Благодатских А.И., Петров Н.Н., *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов*, Ижевск: Изд-во УдГУ (2009).
3. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N., “Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders”, *Dynamic Games and Applications*, V. 9, № 3, 594–613 (2019).
4. Благодатских А.И., Банников А.С., “Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, Т. 62, 10–29 (2023).

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

SPEED OF PERFORMANCE OF A GROUP OF CONTROLLED OBJECTS

Бортаковский А.С.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, д. 4, Москва, 125993, Россия

asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача быстродействия группы управляемых объектов, начальное состояние каждого из которых задано, а конечное – выбирается из фиксированного набора возможных терминальных состояний (целей). Для каждого объекта требуется назначить цель и найти управление, обеспечивающее одновременное достижение группой всех выбранных целей за наименьшее время. Поскольку оптимальные по быстродействию управления отдельными объектами не решают задачу группового быстродействия, применяются так называемые минимально опаздывающие траектории [1]. Разработана методика решения поставленной задачи, которая включает алгоритм решения минимаксной задачи назначения, итерационную процедуру использования оптимальных и минимально опаздывающих траекторий. Эффективность предлагаемой методики зависит от динамики управляемых объектов. Алгоритмы решения задачи быстродействия полностью реализованы для группы объектов, плоское движение которых представляется траекториями Маркова-Дубинса [2].

Литература

1. Бортаковский А.С., "Быстродействие группы управляемых объектов", *Известия РАН. Теория и системы управления*, No. 5, 16–44 (2023).
2. Dubins L.E., "On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents", *American. Mathematics.*, 79, No. 3, 497–516 (1957).

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НАКОПИТЕЛЯМИ ЭНЕРГИИ

OPTIMAL CONTROL OF ENERGY STORAGE

Васин А.А.

МГУ, факультет ВМК, Москва, 119991, Россия

А.В. Кряжимский уделял большое внимание задачам оптимального управления, связанным с проблемами экономики (например, см. [1]). Развитие электроэнергетики является важной задачей с точки зрения ускорения темпов роста российской экономики. Ее решение связано с использованием новых экономических и технических инструментов для оптимизации производства и потребления электроэнергии. Для рынков электроэнергии характерны большие перепады цен между пиковыми периодами с большими объемами потребления и ночными периодами с низким потреблением. В этой ситуации полезную роль для потребителя может сыграть накопитель энергии: потребитель накапливает в нем энергию при низких ценах и использует ее при высоких ценах в тех периодах, когда у него большая потребность в энергии.

Сформулируем для накопителя задачу оптимального управления с дискретным временем t в течение интервала планирования $t = \overline{1, T}$, соответствующего суткам. Обозначим через E объем накопителя, V – максимальную скорость его зарядки и разрядки, η_{ch} и $\eta_{dis} > 1$ — обратные коэффициенты эффективности зарядки и разрядки соответственно, v^t_{Bat} — объем энергии, на который заряжается (если > 0) или разряжается (если < 0) накопитель в период t. Ниже основное внимание уделяется модели рынка, на котором каждый накопитель имеет возможность продать накопленную энергию обратно в сеть по текущей цене покупки. В этом случае стратегия управления накопителем задается вектором $\vec{v}_{Bat} = (v^t_{Bat}, t = \overline{1, T})$, удовлетворяющим следующим ограничениям: $\forall t$

$$|v^t_{Bat}| \leqslant V; \tag{1}$$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{t} v^k_{Bat} \leqslant E; \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} v^t_{Bat} = 0. \tag{3}$$

Пусть цены p^t_i, $t = \overline{1,T}$, в интервале планирования известны. Оптимальная стратегия накопителя максимизирует прибыль от перепродажи энергии при данных ценах p^t_i, $t = \overline{1,T}$, и ограничениях (1-3):

$$\vec{v}^*_{Bat} = \underset{\vec{v}_{Bat}}{\operatorname{argmax}} \Big(-\sum_{t=1}^{T} p^t_i v^t_{Bat} \eta(v^t_{Bat}) \Big), \tag{4}$$

где $\eta^t(v^t_{Bat}) = \begin{cases} \eta_{ch}, & \text{если } v^t_{Bat} > 0 \text{ (зарядка накопителя);} \\ \frac{1}{\eta_{dis}}, & \text{если } v^t_{Bat} < 0 \text{ (разрядка накопителя).} \end{cases}$

Задача 4 представляет интерес также с точки зрения оптимизации работы энергосистемы в целом: согласно известной теореме (Welfare Theorem, см. [2]) ее решение является компонентой оптимальной стратегии, обеспечивающей максимум общественного благосостояния. Обозначим $\hat{\eta} = \eta_{ch} \cdot \eta_{dis}$. Решения задачи (4) для некоторых частных случаев получено в [3]. Пусть ограничение (2) на объем накопителя никогда не является активным, $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_T$ обозначает порядок периодов времени по возрастанию цен (то есть $\{p^{\tau_1}_i \leqslant p^{\tau_2}_i \leqslant ... \leqslant p^{\tau_T}_i\}$), а $\overline{\tau}_1$, $\overline{\tau}_2$, ..., $\overline{\tau}_T$ обозначает порядок периодов времени по убыванию цен в интервале планирования $\overline{1,T}$, m обозначает максимальное число j такое, что $\hat{\eta} p^{t_j}_i \leqslant p^{\bar{t}_j}_i$.

Утверждение 1. Оптимальная стратегия для задачи (4) в этом случае: $v^{t*}_{Bat} = V$ при $t = \tau_1$, ..., τ_m; $v^{t*}_{Bat} = -V$ при $t = \overline{\tau}_1$, ..., $\overline{\tau}_m$, $v^{t*}_{Bat} = 0$ при прочих t.

Более типичный случай - когда оба ограничения, на скорость зарядки (1) и на объем накопителя (2), могут быть активными. Определим на графике цен существенные экстремумы $t_1 < \bar{t}_1 < t_2 < \bar{t}_2 < ... < t_k < \bar{t}_k$, где t_1, ..., t_k - локальные минимумы, $\bar{t}_1$, ..., $\bar{t}_k$ - локальные максимумы, удовлетворяющие условиям:

$$\forall t \in (t_j, \bar{t}_j)\ p^{\bar{t}_j} \geqslant p^t \geqslant p^{t_j}, \forall t' \in (t, \bar{t}_j)\ \hat{\eta} p^{t'} > p^t.$$
$$\forall t \in (\bar{t}_j, t_{j+1})\ p^{\bar{t}_j} \geqslant p^t \geqslant p^{t_{j+1}}, \forall t' \in (t, t_{j+1})\ p^{t'} \leqslant \hat{\eta} p^t,$$
$$\forall j\ p^{\bar{t}_j} > \hat{\eta}\ p^{t_j},\ p^{\bar{t}_j} > \hat{\eta} p^{t_{j+1}},\ \text{где } k+1 := 1.$$

Пусть $\bar{t}_{j,0} = \bar{t}_j, \bar{t}_{j,1}, \bar{t}_{j,2}, ...$ — упорядочение периодов времени в интервале от локального минимума t_j до локального минимума t_{j+1} по убыванию цен; $t_{j,0} = t_j, t_{j,1}, t_{j,2}, ...$ — упорядочение периодов по возрастанию цен в интервале от локального максимума $\bar{t}_{j-1}$ до локального максимума $\bar{t}_j$; $l^* = [E/V] + 1$ — необходимое число периодов для полной загрузки или разгрузки накопителя.

Утверждение 2. Если $\forall j \; p^{\bar{t}_{j,l^*}} > \hat{\eta} \max(p^{t_{j,l^*}}, p^{t_{j+1,l^*}})$, то оптимальная стратегия задачи (4) имеет вид: $\forall j = 1, ..., k \; v_{Bat}^{t_{j,r}*} = V$, $v_{Bat}^{\bar{t}_{j,r}*} = -V$ при $r = 1, ..., l^* - 1$, $v_{Bat}^{t_{j,l^*}*} = -v_{Bat}^{\bar{t}_{j,l^*}*} = E - (l^* - 1)V$, $v_{Bat}^{t*} = 0$ при прочих t.

Таким образом, накопитель полностью загружается в окрестности очередного локального минимума и разгружается в окрестности очередного локального максимума. При большом объеме накопителя условие утверждения 2 не выполняется, и оптимальная стратегия определяется более сложным образом, сочетая идеи утверждений 1 и 2.

Литература

1. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В., “Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике”, *Успехи математических наук*, 67, No. 2, 3–64 (2012).
2. Debreu G., “Valuation Equilibrium and Pareto Optimum”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 40, No. 7, 588–592 (1954).
3. Васин А.А., Григорьева О.М., Серегина И.Ю., “Оптимизация параметров накопителей для потребителей на рынке электроэнергии”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, No. 1, 20–27 (2023).

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ, ЛИНЕАРИЗУЕМЫМ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ, В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

CONTROL OF A NONLINEAR OBJECT LINEARIZED BY FEEDBACK IN A DIFFERENTIAL GAME PROBLEM

Гаража И.А.

НИУ ВШЭ, ул. Мясницкая, д. 20, г. Москва, 101000, Россия

garazha.ilya@yandex.ru

Для нелинейной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) + g_1(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) + g_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t), \qquad (\mathbf{1})$$

для которой существует диффеоморфизм, преобразующий исходную систему с линейной основной частью и нелинейной обратной связью, ставится задача оптимального управления. Система имеет непрерывные функции $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ и управления $u(t)$, $w(t)$, с ограничениями по мощности, реализующимися с использованием обратной связи по состоянию. Для этой системы ставится задача дифференциальной игры, и такая игра рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. игра с нулевой суммой [3].

Для оценки действий игроков вводится функционал качества

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \lim_{t_f \to \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^{\mathsf{T}}(t) Q \varepsilon(t) + u^{\mathsf{T}}(t) R u(t) - w^{\mathsf{T}}(t) P w(t) \right\} \mathrm{d}t \qquad (\mathbf{2})$$

и задаётся Гамильтониан $H(x, u, w, \lambda)$ с сопряжённой переменной λ.

Тогда, при отсутствии ограничений на управления, из необходимых и достаточных условий минимакса задачи, выводится вид управлений: $u(t) = -R^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t)$, $w(t) = P^{-1} g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t)$. Этот вид определяет возможное описание оптимальных управлений. Однако для того, чтобы это управление было оптимальным, необходимо выполнение наложенных ограничений. И если ввести матрицу $\Pi(x(t)) = g_1(x(t)) R^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x(t)) - g_2(x(t)) P^{-1} g_2^{\mathrm{T}}(x(t))$, то **(1)** преобразуется в систему не от двух игроков g_1 и g_2, а только от Π:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t)) - \Pi(\mathbf{x}(t))\lambda(\mathbf{x}(t)). \qquad (\mathbf{3})$$

Если **(3)** можно линеаризовать обратной связью [1–4], т.е. представить в виде: $\frac{d}{dt} z(t) = A_0 z(t) + B_0 v(t)$ **(4)**, где A_0 и B_0 являются константными матрицами, а $\lambda(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t)) v(x(t))$ — закон, преобразующий **(3)** в **(4)**, то справедливо следующее:

Учитывая, что цели управления остались теми же самыми, производится преобразование **(2)** в новый функционал

$$J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \lim_{t_f \to \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ (\Phi^{-1}(z))^{\mathrm{T}}(t) Q (\Phi^{-1}(z)) +$$

$$+ \big[\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z)) v\big]^{\mathrm{T}} \Pi(\Phi^{-1}(z)) \big[\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z)) v\big] \Big\} \mathrm{d}t$$

Далее вводится функция Беллмана $V^0(t, z(t)) = J(z^0(\cdot), v^0(\cdot))$ и, используя обозначения из [4], осуществляется переход к уравнению Беллмана с новым функционалом, матрицы штрафа $Q(z)$, $R(z)$, $N(z)$ которого становятся зависимыми от состояния:

$$\inf_{v \in V} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} (A_0 + B_0 v) + \frac{1}{2} \left\{ z^T Q(z) z + 2 z^T N(z) v + v^T R(z) v \right\} \right].$$

Линейность структуры преобразованной системы и квадратичный функционал позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана к уравнению типа Риккати от переменной $S(z) = [\partial V(z)/\partial z]^T$. Решение уравнение Риккати в полученном виде в общем случае аналитически невозможно. Возникает необходимость в аппроксимации решения, которая реализуется численными или интерполяционными методами. В последнем случае удается получить субоптимальное управление.

Тогда оптимальное управление и динамическая система будут иметь, соответственно, вид:

$$\lambda(t) = \Pi(\Phi^{-1}(z)) B_0^T S(\Phi^{-1}(z))$$

и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t)) - \Pi(\mathbf{x}(t)) \Pi(\Phi^{-1}(z)) B_0^T S(\Phi^{-1}(z))$$

Литература

1. Isidori A. *Nonlinear Control Systems.* 3rd Edition. - London: Springer, (1995). - 549 p.
2. Афанасьев В.Н. *Дифференциальные игры в задачах управления неопределенными системами.* -М.: ЛЕНАРД. (2023). - 400с.
3. Miroslav Krstic, Feedback Linearizability and Explicit Integrator Forwarding Controllers for Classes of Feedforward Systems. IEEE Transaction on Automatic Control. vol. 49, № 10. (2004). P 5479-5484
4. Афанасьев В.Н., Орлов П.В. “Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью” // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 14-22.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

OPTIMAL FEEDBACK STRATEGIES IN ZERO-SUM GAMES FOR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Гомоюнов М.И.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, Екатеринбург, 620108, Россия

m.i.gomoyunov@gmail.com

В рамках подхода [1, 2] рассматривается игра, в которой движение динамической системы описывается нелинейным интегральным уравнением Вольтерра — Гаммерштейна второго рода с ядром K, имеющим интегрируемую особенность степенного типа, а целью управления первого (соответственно, второго) игрока является минимизация (соответственно, максимизация) заданного терминально-интегрального показателя качества. При дополнительном предположении о невырожденности линейного интегрального оператора Вольтерра с ядром K доказывается, что игра имеет цену, и предъявляется конструкция оптимальных позиционных стратегий управления игроков. Основу результатов составляет техника так называемых наследственных уравнений Гамильтона — Якоби [3] и использование подходящего функционала Ляпунова — Красовского [4].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

Литература

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, М.: Наука, (1974).
2. Красовский Н.Н., *Управление динамической системой*, М.: Наука, (1985).
3. Лукоянов Н.Ю., *Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией*, Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, (2011).
4. Gomoyunov M.I., “On viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for fractional-order systems,” *ArXiv:2109.02451*, 24 p., (2021).

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ЗАДАНИИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

ABOUT ANALYTIC CONTROLLABILITY SET FOR ONE STATE-CONSTRAINED SECOND-ORDER SYSTEM

Гончарова М.Н.

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, ул.Ожешко, 22, Гродно, 230023, Беларусь

Самсонов С.П.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Российская Федерация

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + v_2, \end{cases} \tag{1}$$

где управление $(v_1; v_2)$ есть кусочно-непрерывная функция, принимающая значения из четырехугольника V.

Будем считать, что выполняются неравенства $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Вершины четырехугольника V обозначим через $C_i, i = \overline{1,4}$, обходя его контур против часовой стрелки. Координаты вершины C_i обозначим через C_{i1}, C_{i2}. Примем, что выполняются неравенства $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$, $C_{21} < 0$, $C_{22} > C_{12}$, $C_{31} < C_{21}$, $C_{32} < 0$, $C_{41} > 0$, $C_{42} < C_{32}$, $C_{41} < C_{11}$.

Фазовое ограничение зададим множеством

$$X = \{(x_1; x_2) \in R^2 | x_2 \leqslant d, -\frac{C_{32}}{\lambda_2} \leqslant d < -\frac{C_{42}}{\lambda_2}\}. \tag{2}$$

В работе для произвольных моментов времени t построено множество $Y(t) = Y(t, t_1)$,то есть множество всех точек множества (2), в которых объект (1) находится в момент времени t, в момент времени t_1 попадает в начало координат при помощи некоторого допустимого управления и выполнении ограничения (2) в каждый момент времени из отрезка $[t; t_1]$. Момент времени t_1 считаем фиксированным.

Пусть определены величины

$\bar{\tau} = -\frac{1}{\lambda_2}\ln(1 + \frac{d\lambda_2}{C_{42}})$, $\theta_1 = \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{d\lambda_2 C_{32} + C_{42}^2}{d\lambda_2 C_{42} + C_{42}^2}$, $\theta_2 = \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{d\lambda_2 C_{12} + C_{42}^2}{d\lambda_2 C_{42} + C_{42}^2}$.

Теорема 1. Если $\bar\tau < t_1 - t \leqslant \bar\tau + \theta_1$,то множество $Y(t) = Y(t,t_1)$ ограничено линиями

$$y_i(l) = \frac{C_{1i}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(t_1-t)} + \frac{C_{2i} - C_{1i}}{\lambda_i} e^{\lambda_i(l-t_1+t)} - \frac{C_{2i}}{\lambda_i}, i = 1,2, \qquad (3)$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$;

$$z_i(l) = \frac{C_{3i}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(t_1-t)} + \frac{C_{2i} - C_{3i}}{\lambda_i} e^{\lambda_i(l-t_1+t)} - \frac{C_{2i}}{\lambda_i}, i = 1,2, \qquad (4)$$

где параметр $l \in [0; t_1 - t]$; $s_i(l) = \frac{C_{3i}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(t_1-t)} + \frac{C_{4i}-C_{3i}}{\lambda_i} e^{\lambda_i(l-t_1+t)} - \frac{C_{4i}}{\lambda_i}, i = 1,2$, где параметр $l \in [l_1; t_1 - t]$, $l_1 = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{C_{42}e^{\lambda_2\theta} - C_{32}}{C_{42} - C_{32}}$; $h_i(l) = \frac{C_{1i}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(t_1-t)} + \frac{C_{4i}-C_{1i}}{\lambda_i} e^{\lambda_i(l-t_1+t)} - \frac{C_{4i}}{\lambda_i}, i = 1,2$, где параметр $l \in [l_2; t_1 - t]$, $l_2 = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{C_{42}e^{\lambda_2\theta} - C_{12}}{C_{42} - C_{12}}$; линией $x_2 = d$ при изменении переменной x_1 от значения $\frac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(l_2-t_1+t)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1}$ до значения $\frac{C_{31}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{31}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(l_1-t_1+t)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1}$.

Теорема 2. Если $\bar\tau + \theta_1 < t_1 - t \leqslant \bar\tau + \theta_2$,то множество $Y(t) = Y(t,t_1)$ ограничено линиями (3), (4) и линиями

$$\begin{aligned} s_1(l) &= \tfrac{C_{31}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \tfrac{C_{41}-C_{31}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(l-t_1+\bar\tau+t)} - \tfrac{C_{41}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1}, \\ s_2(l) &= \tfrac{C_{32}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2(t_1-t)} + \tfrac{C_{42}-C_{32}+\delta_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2(l-t_1+\bar\tau+t)} - \tfrac{C_{42}+\delta_1}{\lambda_2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\delta_1 = d\lambda_2 \frac{C_{42} - C_{32}e^{-\lambda_2(t_1-\bar\tau-t)}}{C_{42}(e^{-\lambda_2(t_1-\bar\tau-t)} - 1)} - C_{42}$, $k_{43} = \frac{C_{41}-C_{31}}{C_{42}-C_{32}}$, параметр $l \in [0; t_1 - \bar\tau - t]$; $h_i(l) = \frac{C_{1i}}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(t_1-t)} + \frac{C_{4i}-C_{1i}}{\lambda_i} e^{\lambda_i(l-t_1+t)} - \frac{C_{4i}}{\lambda_i}, i = 1,2$, где параметр $l \in [l_2; t_1 - t]$; линией $x_2 = d$ при изменении переменной x_1 от значения $\frac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(l_2-t_1+t)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1}$ до значения $\frac{C_{31}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{31}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-\bar\tau-t)} - \frac{C_{41}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1}$.

Теорема 3. Если $t_1 - t > \bar\tau + \theta_2$, то множество $Y(t) = Y(t,t_1)$ ограничено линиями (3)-(5), линией

$$\begin{aligned} h_1(l) &= \tfrac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \tfrac{C_{41}-C_{31}+\delta_2 k_{41}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(l-t_1+\bar\tau+t)} - \tfrac{C_{41}+\delta_2 k_{41}}{\lambda_1}, \\ h_2(l) &= \tfrac{C_{12}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2(t_1-t)} + \tfrac{C_{42}-C_{12}+\delta_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2(l-t_1+\bar\tau+t)} - \tfrac{C_{42}+\delta_2}{\lambda_2}, \end{aligned}$$

где $\delta_2 = d\lambda_2 \frac{C_{42} - C_{12}e^{-\lambda_2(t_1-\bar\tau-t)}}{C_{42}(e^{-\lambda_2(t_1-\bar\tau-t)} - 1)} - C_{42}$, $k_{41} = \frac{C_{41}-C_{11}}{C_{42}-C_{12}}$, параметр $l \in [0; t_1 - \bar\tau - t]$ и линией $x_2 = d$ при изменении переменной

x_1 от значения $\frac{C_{11}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{11}+\delta_2 k_{41}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1(t_1-\bar{\tau}-t)} - \frac{C_{41}+\delta_2 k_{41}}{\lambda_1}$ до значения

$$\frac{C_{31}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1(t_1-t)} + \frac{C_{41}-C_{31}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1(t_1-\bar{\tau}-t)} - \frac{C_{41}+\delta_1 k_{43}}{\lambda_1}.$$

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОВОДЫРЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ.

CONSTRUCTION OF THE FIRST PLAYER CONTROL FOR A GUIDE SYSTEM IN A NONLINEAR DIFFERENTIAL GAME

Григоренко Н.Л.

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, 119991, ГСП-1, ул.Колмогорова,д.1, стр.52, Россия

grigor@cs.msu.ru

Для нелинейных дифференциальных игр двух игроков, в работе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина [1], сформулированы постановки задач преследования-убегания в классе позиционных управлений, доказаны теоремы об альтернативе [1], содержащие условия существования решения соответствующих задач управления и алгоритмы построения управлений первого и второго игроков решающих соответствующие задачи управления. Теоремы предусматривают построение вспомогательной системы поводыря, для которой ищется решений в классе контруправлений. В случае линейной системы поводыря, решение в классе контруправлений может быть найдено методами Н.Н. Красовского, А.И. Субботина [1], Л.С. Понтрягина [2], Л.С. Понтрягина, Е.Ф. Мищенко [3], Б.Н. Пшеничного [4], М.С. Никольского [5]. В случае нелинейной системы поводыря, решению задачи преследования посвящены работы Б.Н. Пшеничного [4], М.С. Никольского [5]. Настоящий доклад посвящен нахождению решения задачи преследования для класса нелинейных дифференциальных игр и будет проиллюстрирован на нелинейном варианте дифференциальной игры в форме контрольного примера Л.С. Понтрягина в классе позиционных стратегий. Подход основан на процедуре управления с поводырем [1], в которой для решения задачи управления поводырем применен метод структурного синтеза [6]. Рассматриваются варианты постановок задачи преследования: без учета ограничений на управление первого игрока и учитывающие ограничение на управление первого игрока. Управление первого игрока, полученные в результате таких подходов, различаются требованиями к информации об управлении второго игрока в задаче преследования для системы поводыря. Приведена оценка ресурса первого игрока, требуемого для окончания игры в соответствии с предлагаемым способом управления. Предложены три вида систем поводыря для игры “Контрольный пример Л.С. Понтрягина” и решение нелинейной задачи управления для этих систем в классе контруправлений.

Рассматривается динамика догоняющего объекта P описываемая дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1, x_2)x_2 + g_1(x_1) + u(t); \end{cases}$$

где x_1, x_2 — k-мерные ($k \geqslant 1$) векторы из стандартного действительного евклидова арифметического пространства R^k, элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов; $f_1(x_1, x_2) \in C^1(R^{2k})$ скалярная функция, $g_1(x_1) \in C^1(R^k)$, $f_1(x_1, x_2) \geqslant 0$, $x_1 g_1(x_1) \geqslant 0$, u — управление, $|u(t)(t)| \leqslant B_1$ для некоторой постоянной $B_1 > 0$. Динамика убегающего объекта E описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -f_2(y_1, y_2)y_2 + g_2(y_1) + v(t); \end{cases}$$

где y_1, y_2 — k-мерные ($k \geqslant 1$) векторы из R^k, $f_2(y_1, y_2) \in C^1(R^{2k})$ скалярная функция, $g_2(y_1) \in C^1(R^k)$, $f_2(y_1, y_2) \geqslant 0$, $y_1 g_2(y_1) \geqslant 0$, v — управление, $|v(t)(t)| \leqslant B_2$ для некоторой постоянной $B_2 > 0$. В R^{4k} выделено терминальное множество M из векторов $z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ таких, что $\|x_1 - y_1\| \leqslant \ell_1$, $\|x_2 - y_2\| \leqslant \ell_2$. Рассматривается задача конструирования управления первого игрока P, в классе позиционных управлений [1], гарантирующего в конечный момент времени условия окончания игры при любом допустимом управлении игрока E. Допустимые управления игрока E - измеримые по Лебегу функции $v(t)$, $\|v\| \leqslant B_2$. Допустимые управления игрока P - измеримые по t и непрерывные по z функции $u(t, z)$, $\|u\| \leqslant B_1, z = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ [1]. Цель P — добиться соотношений $\|x_1(T) - y_1(T)\| \leqslant \ell_1$, $\|x_2(T) - y_2(T)\| \leqslant \ell_2$. Момент времени T — не фиксирован.

Литература

1. Красовский Н.Н.,Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М, (1974).
2. Понтрягин Л.С.,"Линейные дифференциальные игры преследования", Матем. сб., 112(154):3(7) (1980), 307–330.
3. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф., "Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх", Дифференц. уравнения, 7:3 (1971), 436–445.
4. Пшеничный Б.Н., "Структура дифференциальных игр", Докл. АН СССР, 184:2 (1969), 285–287.
5. Никольский М.С., "Исследование обобщенного контрольного примера Л.С.Понтрягина из теории дифференциальных игр", Тр. ИММ УрО РАН, (2016), том 22, номер 2, 211–217.
6. Колесников А.А., *Синергетические методы управления сложными системами. Терия системного синтеза.*, Либроком,(2019).

ЗАДАЧИ ДЕШЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

CHEAP CONTROL PROBLEMS WITH SMOOTH GEOMETRIC CONSTRAINTS ON CONTROL

Данилин А.Р., Шабуров А.А.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН), ул. Софьи Ковалевской, д. 16, Екатеринбург, 620108, Россия

dar@imm.uran.ru, alexandershaburov@mail.ru

Среди работ по теории управления [1,2], посвященных сингулярно возмущенным задачам управления (см. например, обзоры [3,4]), выделяется класс задач с дешевыми управлениями. Малый параметр в таких задачах появляется в качестве множителя перед интегральным слагаемым в функционале качества. При отсутствии ограничений на управление такие задачи близки к вырожденным задачам в смысле принципа максимума Понтрягина. При этом, асимптотика оптимального управления строится в линейно–квадратичных задачах без ограничений на управление (см. например, статьи [5,6,7]).

Авторами рассмотрены задачи дешевого управления с линейной системой с постоянными коэффициентами и интегральным выпуклым критерием качества с гладкими ограничениями на управление в виде шара [8,9]. При стремлении малого параметра к нулю такая задача сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Показано, что решение задачи с дешевым управлением в среде без сопротивления [8] раскладывается в асимптотический степенной ряд по малому параметру и ведет себя более регулярно, чем решение задачи быстродействия с аналогичной управляемой системой [10]. Однако в случае наличия возмущенных начальных данных асимптотика определяющего вектора в задачах дешевого управления обладает сложным характером [9].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, (1961).
2. Красовский Н.Н., *Теория управления движением, Линейные системы*, Наука, (1968).
3. Дмитриев М.Г., Курина Г.А., "Сингулярные возмущения в задачах управления," *Автоматика и телемеханика*, No. 1, 3–51 (2006).
4. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y., "Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012," *Int. J. Inf. Syst. Sci.*, 9, No. 1, 1–36 (2014).
5. Glizer V.Y., "Suboptimal Solution of a Cheap Control Problem for Linear Systems with Multiple State Delays," *Journal of Dynamical and Control Systems*, 11, No. 4, 527–574 (2005).
6. Kurina G.A, Nguyen T.H., "Asymptotic solution of a linear-quadratic problem with discontinuous coefficients and cheap control," *Appl. Math. Comput.*, 232, 347–364 (2014).
7. Калашникова М.А., Курина Г.А., "Асимптотическое решение линейноквадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены," *Тр. ИММ УрО РАН.*, 22, No. 1, 124–139 (2016).
8. Данилин А.Р., Шабуров А.А., "Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешёвым управлением," *Сиб. журн. индустр. матем.*, 25, No. 3, 5–13 (2022).
9. Данилин А.Р., Шабуров А.А., "Асимптотика решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, дешевым управлением и возмущением начальных данных," *Тр. ИММ УрО РАН*, 29, No. 1, 67–76 (2023).
10. Данилин А.Р., Ильин А.М., "Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных," *Докл. РАН.*, 350, No. 2, 155–157 (1996).

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ С МИГРАЦИЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПОТОМСТВОМ

ON THE EXISTENCE OF STATIONARY STATES IN THE DYNAMICS OF POPULATIONS WITH MIGRATION AND DISTRIBUTED OFFSPRING

Давыдов А.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, 119991, Ленинские горы, д. 1, Москва, Россия
НИТУ МИСИС, 119049, Ленинский пр-кт, д. 4, стр. 1, Москва, Россия

davydov@mi-ras.ru

Хачатрян Х.А.

Ереванский государственный университет, г.Ереван, 0025, Алека Манукяна, 1, Республика Армения

khachatur.khachatryan@ysu.am, Khach82@rambler.ru

Для многомерного интегральное уравнение свёрточного типа на арифметическом пространстве, решение которого доставляет стационарное состояние популяции, распределенной в арифметическом пространстве [1], при естественных ограничениях на ядро и на свободный член доказано существование измеримого неотрицательного решения этого уравнения и описаны свойства этого решения [2]. Также показано, что при подходящих суммируемых характеристиках изучаемого уравнения существует однопараметрическое семейства таких решений, то есть нет единственности решения. В случае же, когда такой суммируемости нет, при дополнительном ограничении на ядро устанавливается единственность решения изучаемого уравнения. Также приводятся примеры таких уравнений для иллюстрации полученных результатов.

Литература

1. Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю., Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества, *в сборнике Особенности и приложения, серия Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, издательство МАИК "Наука/Интерпериодика" (Москва)*, 267, с. 46-55 (2009).

2. Давыдов А.А., Хачатрян Х.А., Стационарные состояния в динамике популяций с миграцией и распределенным потомством, *Современная математика. Фундаментальные направления,* 69, No 4 (в печати).

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДЫХ

APPROXIMATION OF SOLUTIONS TO INVERSE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER AT HIGHER DERIVATIVES

Денисов А.М.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия

den@cs.msu.ru

Рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений в частных производных с малым параметром ε при старших производных. Строятся разложения решения этих задач по малому параметру. Ставятся обратные задачи, состоящие в определении либо начальных, либо краевых условий, или функции источника по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказывается, что приближенные решения обратных задач могут быть получены на основе использования конечного числа членов разложения по малому параметру. Получены оценки точности приближенных решений обратных задач при малых значениях ε.

Литература

1. Денисов А.М., “Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопрводности с сингулярным возмущением,” *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 61, No. 12, 2040–2049 (2021).
2. Денисов А.М., “Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных,” *Дифференциальные уравнения*, 59, No. 6, 746–751 (2023).

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

THE PROBLEM OF CONSTRUCTING AN ASYMPTOTIC OBSERVER FOR ONE CLASS OF NONSTATIONARY SYSTEMS VIA DISTURBANCE

Денисова Н. И., Фомичев В. В.

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 119234, Россия

Современной теории управления известны подходы для построения наблюдателей линейных стационарных систем [1] и нестационарных систем без возмущений [2], в то время для вопроса о синтезе набюдателей для линейных нестационарных систем с возмущением продвижений мало.

В данной работе предпринята попытка перенести некоторые результаты, полученные для линейных стационарных систем с возмущением, на нестационарный случай. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + Df \\ y = C(t)x, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный вектор, $f \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, матрицы $A(t)$, $C(t)$ — достаточно гладкие по t и имеют соответствующий порядок, матрица D стационарна, неизвестное возмущение f мажорируется константой. Требуется по информации об известном выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Предполагается, что $l > m$. В этом случае можно разделить выход:

$$y = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'(t) \\ C''(t) \end{pmatrix} x. \tag{2}$$

В [3] было рассмотрено преобразование невырожденной матрицей $T(t)$, приводящее исходную систему к наблюдаемой подсистеме с известным выходом и полностью известным входом (который зависит от измеряемого, известного выхода), а в данной работе представлены численные рекомендации по построению наблюдателя и проведено моделирование для системы третьего порядка с матрицами общего вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Общий случай мождет быть сведён к данному случаю при $c_{11}(t) \neq 0$ и $c_{22}(t) \neq 0$.

Было выяснено, что данная система наблюдаема тогда и только тогда, когда $c_{11}(t) \neq 0$, $c_{22}(t) \neq 0$ и либо $a_{13}(t) \neq 0$, либо $a_{23}(t) \neq 0$.

В результате выбора матрицы преобразования следующего вида:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ c_{11}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где m — некоторая константа, которая в любой момент времени t мажорирует $c_{11}(t)$, была получена наблюдаемая подсистема.

В результате исследования матрицы наблюдаемости исходной системы и подсистемы было выяснено, что задача наблюдения может быть решена при выполнении следующих условий:

$$c_{11}(t) \neq 0, \; c_{22}(t) \neq 0, \; a_{23}(t) \neq 0, \; a_{33}(t) < 0. \tag{4}$$

Для выбора коэффициентов наблюдателя есть следующие рекомендации:

$$\begin{aligned} l_1(t) &= (a_{23}(t) + a_{32}(t)m^4)/c_{22}(t)m^3, \\ l_2(t) &= -a_{22}(t)/c_{22}(t)m - \delta, \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Работа выполнена при поддержке МЦФиПМ.

Литература

1. Fomichev V.V., Vysotskii A.O., “Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order,” *Журнал*, 11, No. 22, 333–444 (2005).
2. Куок Д.В., Бобцов А.А., “Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно” *Автоматика и телемеханика*, 12, 100–110 (2020).
3. Фомичев В.В., Денисова Н.И., “Подходы к построению наблюдателей для нестационарных систем при внешних возмущениях,” *Дифференциальные уравнения*, 58, No. 8, 1159–1160 (2022).

ОБЩИЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

A GENERAL LAGRANGE PRINCIPLE AND ITS APPLICATION TO OPTIMAL CONTROL

Дмитрук А.В.

ЦЭМИ РАН, факультет ВМК МГУ, Москва, Россия

optcon@mail.ru

Основное отличие задач оптимального управления от задач классического вариационного исчисления состоит в наличии бесконечного числа ограничений типа неравенства, поэтому важно иметь стандартный аппарат для получения условий оптимальности в этих задачах. В абстрактной постановке имеем следующую задачу на экстремум в банаховом пространстве X:

$$F_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) \in K_i\,, \quad i = 1, \ldots, \nu, \qquad g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $g : X \to Y$ и все $f_i : X \to Z_i$ есть отображения в банаховы пространства Y и Z_i, соответственно, а K_i – замкнутые выпуклые конусы с непустой внутренностью в пространствах Z_i, $i = 1, \ldots, \nu$. Нас интересуют необходимые условия локального минимума в точке $x_0 \in X$.

Эта постановка включает большинство как теоретических, так и прикладных задач оптимизации, в том числе задачи оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями типа неравенства $\Phi(t, x(t)) \leqslant 0$ и $\varphi(t, x(t), u(t)) \leqslant 0$, которые можно трактовать как принадлежность их левых частей конусам C^- и L_∞^- неположительных функций в пространствах C и L_∞ соответственно.

Если все $Z_i = \mathbb{R}$, а $K_i = \mathbb{R}_-$, то имеем обычную *задачу нелинейного программирования* с неравенствами $f_i(x) \leqslant 0$. В общем случае включения $f_i(x) \in K_i$ задают бесконечное число ограничений неравенства.

Предположения. 1) Целевая функция F_0 и отображения f_i дифференцируемы по Фреше в точке x_0; оператор g строго дифференцируем в x_0 (предположения гладкости), 2) образ производной $g'(x_0)$ замкнут в Y (ослабленная регулярность ограничения равенства).

Теорема. Пусть x_0 есть точка локального минимума в задаче (1). Тогда найдутся множители Лагранжа $\alpha_0 \geqslant 0$, $z_i^* \in$

Z_i^*, $i = 1, \ldots, \nu$, и $y^* \in Y^*$, не все равные нулю, такие что $z_i^* \in K_i^0$ и $\langle z_i^*, f_i(x_0)\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, \nu$ (т.е. каждый z_i^* есть внешняя нормаль к конусу K_i в точке $z_{i0} = f_i(x_0)$), и при этом функция Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \alpha_0 F_0(x) + \sum_{i=1}^{\nu}\langle z_i^*, f_i(x)\rangle + \langle y^*, g(x)\rangle$ стационарна в x_0:

$$\mathcal{L}'(x_0) = \alpha_0 F_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{\nu} z_i^* f_i'(x_0) + y^* g'(x_0) = 0. \qquad (2)$$

Последнее равенство называется *уравнением Эйлера–Лагранжа.*

Доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина с использованием стандартных фактов функционального анализа [1–3].

В задачах с фазовыми ограничениями вида $\Phi(t, x(t)) \leqslant 0$ внешними нормалями к конусу $C^-[0,T]$ в точке $\Phi(t, x^0(t))$ будут меры Стилтьеса $d\mu(t) \geqslant 0$, сосредоточенные на множестве выхода оптимальной траектории на фазовую границу: $\Phi(t, x^0(t)) = 0$, а в задачах со смешанными ограничениями $\varphi(t, x(t), u(t)) \leqslant 0$ это будут элементы пространства $L_\infty^*[0,T]$, сосредоточенные при каждом $\delta > 0$ на множестве $M_\delta = \{t \mid \varphi(t, x^0(t), u^0(t)) \geqslant -\delta\}$ "почти выхода" оптимального процесса $(x^0(t), u^0(t))$ на соответствующую границу. Как известно, пространство L_∞^* гораздо шире "хорошего" пространства L_1, поскольку содержит т.н. *сингулярные* элементы. Если смешанные ограничения в определенном смысле *регулярны*, то в уравнении Эйлера–Лагранжа этих сингулярных элементов не будет, и внешними нормалями к конусу $L_\infty^-[0,T]$ в точке $\varphi(t, x^0(t), u^0(t))$ будут функции $\lambda(t) \geqslant 0$, сосредоточенные на множестве M_0. В общем случае наличие сингулярных элементов исключить нельзя.

Нам представляется интересным применение условия (2) в других классах оптимизационных задач.

Литература

1. A. Dmitruk, N. Osmolovskii. A General Lagrange Multipliers Theorem, *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017)*, IEEE Xplore Digital Library, 2017, doi: 10.1109/CNSA.2017.7973951.
2. A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii. A General Lagrange Multipliers Theorem and Related Questions, *Control Systems and Math. Methods in Economics, (Feichtinger et al. eds)*, Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, v. 687, p. 165–194 (2018).

3. A.V. Dmitruk, N.P. Osmolovskii. Lagrange Multipliers Rule for a General Optimization Problem with an Infinite Number of Constraints, *Recent Advances of the Russian Operations Research Soc. (A. Vasin and F. Aleskerov eds.)*, Cambridge Scholars Publishing, p. 212–232 (2020).

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ФРОНТА ОПТИМАЛЬНЫХ АРХИТЕКТУР НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ АЛГОРИТМАМИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

AUTOMATIC GENERATION OF THE FRONT OF OPTIMAL ARCHITECTURAL NEURAL NETWORKS BY MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION ALGORITHMS

Едреев В.В.

Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, ул. Академика Киренского, 26Б, Красноярск, 660074, Россия

vv_edreev@mail.ru

Искусственные нейронные сети – математическая модель, а также её программное или аппаратное воплощение, построенная по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей — сетей нервных клеток живого организма.

Искусственные нейронные сети уже доказали свою эффективность во многих областях и с каждым днем становятся все более востребованным инструментом. Нейронные сети активно применяются для решения следующих типов задач: компьютерное зрение, генерация (звука, текста, видео, фото), регрессия, кластеризация, классификация, прогнозирование временных рядов.

Столь обширное множество решаемых задач приводит к созданию множества архитектур нейронных сетей, некоторые из которых лучше решают те или иные задачи. Архитектура нейронных сетей описывает структуру и организацию нейронной сети, включая количество слоев, количество нейронов в каждом слое, функции активации, методы оптимизации и другие параметры, которые определяют, как будет работать сеть. Создание архитектур, показывающих сравнительно лучшие метрики качества (различные метрики определения точности, время предсказания, объём занимаемой памяти и т.д.), занимает важное место в современных исследованиях в области искусственного интеллекта. Архитектуры могут разрабатывать как люди (например, архитектура LeNet [1] была создана Яном Лекуном, а архитектура Transformer [2] создана коллективом исследователей из Google), так и специализированные алгоритмы.

Поиск архитектур нейронной сети (Neural Architecture Search, NAS) — это процесс автоматизации проектирования архитектур нейронной сети. Другими словами, это процесс поиска оптимальной архитектуры (или поиска фронта оптимальных архитектур). Система NAS получает на вход набор данных и тип задачи (классификация, регрессия и т.д.), и на выходе дает архитектуру модели.

Примеры успешного применения методов NAS:

- применение рекуррентной нейронной сети с подкреплением для генерации архитектур [3] (2017 год);

- архитектура для классификации изображений AmoebaNet-A [4], которая впервые превзошла созданные людьми архитектуры (2019 год);

- методы подбора гиперпараметров нейронный сети [5] (2019 год);

- новый подход GenNas [6], повышающий эффективность использования архитектурами обучающих выборок и возможность по лучшему захвату и преобразованию шаблонов в данных в сетях наподобие ResNet и LSTM (2021 год).

Хотя большинство подходов направлены исключительно на поиск архитектуры с максимальной эффективностью прогнозирования, для большинства практических приложений актуальны и другие критерии, такие как потребление памяти, размер модели или время получения прогноза. Для решения данной проблемы в некоторых методах NAS применяется многокритериальная оптимизация. Данные методы направлены на формирование фронта оптимальных архитектур по множеству поставленных критериев. Среди подобных методов выделяются NSGA-Net [7] и LEMONADE [8].

Исследование в рамках темы «Автоматическая генерация фронта оптимальных архитектур нейронных сетей с помощью многокритериальной оптимизации» будет включать следующие пункты:

- реализация алгоритма многокритериальной оптимизации, базирующегося на алгоритме NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) [9];

- реализация метода кодирования архитектуры и гиперпараметров нейронной сети;

- тестирование алгоритма для генерации и отбора архитектур нейронных сетей под различные задачи.

Тем самым можно будет автоматически генерировать набор архитектур, проводить их эволюцию и выбирать из них именно ту, которая соответствует конкретным требованиям к совокупности критериев.

Теоретическая значимость заключается в более подробном исследование темы поиска архитектур искусственных нейронных сетей с помощью генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации. В процессе исследования могут быть раскрыты новые грани данного вопроса и показаны возможные границы применимости/не применимости подхода при решении различных типов задач.

Практическая значимость заключается в возможности использования полученных в ходе исследования результатов при решении вопросов формирования фронта оптимальных архитектур нейронных сетей и подбора архитектуры под каждую конкретную задачу. Последние исследования показывают, что созданные алгоритмами архитектуры показывают не меньшую, а иногда и большую точность.

Литература

1. LeCun Y. et al. Gradient-based learning applied to document recognition //Proceedings of the IEEE. – 1998. – Т. 86. – №. 11. – С. 2278-2324.
2. Vaswani A. et al. Attention is all you need //Advances in neural information processing systems. – 2017. – Т. 30.
3. Zoph B., Le Q. V. Neural architecture search with reinforcement learning //arXiv preprint arXiv:1611.01578. – 2016.
4. Real E. et al. Regularized evolution for image classifier architecture search //Proceedings of the aaai conference on artificial intelligence. – 2019. – Т. 33. – №. 01. – С. 4780-4789.
5. Feurer M., Hutter F. Hyperparameter optimization //Automated machine learning: Methods, systems, challenges. – 2019. – С. 3-33.
6. Li Y. et al. Generic neural architecture search via regression //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2021. – Т. 34. – С. 20476-20490.
7. Lu Z. et al. Nsga-net: neural architecture search using multi-objective genetic algorithm //Proceedings of the genetic and evolutionary computation conference. – 2019. – С. 419-427.
8. Elsken T., Metzen J. H., Hutter F. Efficient multi-objective neural architecture search via lamarckian evolution //arXiv preprint arXiv:1804.09081. – 2018.
9. Deb K. et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II //Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI: 6th International Conference Paris, France, September 18–20, 2000 Proceedings 6. – Springer Berlin Heidelberg, 2000. – С. 849-858.

КОАЛИЦИОННО-ЭФФЕКТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ОДНОЙ НЕТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ИГРЕ

COALITION-EFFECTIVE EQUILIBRIUM IN A SINGLE NONTRANSFERABLE GAME

Жуковский В.И.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Ленинские горы, СП-1, Москва, 119991, РФ

zhkvlad@yandex.ru

Жуковская Л.В.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центрального экономико-математического института Российской академии наук, Нахимовский пр., 47, Москва, 117418, РФ

zhukovskaylv@mail.ru

Смирнова Л.В.

Государственный гуманитарно-технологический университет, Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, РФ

smirnovalidiya@rambler.ru

Рассматривается нетрансферабельная коалиционная игра N лиц

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{N}, \mathcal{K}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle,$$

здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ разбито на множество попарно непересекающихся подмножеств (коалиций) образующих коалиционную структуру $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_\omega\}$ (т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\omega} K_i = \mathbb{N}$ и $K_i \bigcap\limits_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{\omega} K_j = \emptyset$; игроки из каждой коалиции K_l на своих «внутрикоалиционных совещаниях» выбирают сообща свою стратегию $x_{K_l} = \{x_i \mid i \in K_l\}$ из множества $X_{K_l} = \prod\limits_{i\in K_l} X_i$, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; в результате образуется *ситуация* игры Γ, именно $x = (x_{K_l}, \bar{x}_{-K_l}) \in X = \prod\limits_{i=1}^{\omega} X_i$, где $-K_l = \mathbb{N} \setminus K_l$.

Для каждой подигры (при «замороженном» $\bar{x}_{-K_l}$)

$$\Gamma = \left\langle K_l, \{X_i\}_{i\in K_l}, \{f_i(x_{K_l}, \bar{x}_{-K_l})\}_{i\in K_l} \right\rangle$$

ситуацию $x^P_{K_l}$ назовем K_l-*эффективной*, если

$$\max_{x_{K_l}\in X_{K_l}} \sum_{i\in K_l} \alpha_i f_i(x_{K_l}, \bar{x}_{-K_l}) = \sum_{i\in K_l} \alpha_i f_i(x^P_{K_l}, \bar{x}_{-K_l}), \qquad (1)$$

при каком-либо наборе положительных чисел $(\alpha_i \mid i \in K_l)$; ситуация $x^P = (x^P_{K_l} \mid K_l \in \mathcal{K})$ *индивидуально рациональна* в игре Γ, если

$$f_i(x^P_i, x^P_{-i}) \geqslant \max_{x_i\in X_i} \min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что, если обозначить операцию (1)

$$\underset{x_K\in X_K}{MAX}{}^P f_K(x_K, \bar{x}_{-K}) = f_K(x^P_K, \bar{x}_{-K}),$$

то коалиционно-эффективное равновесие (КЭР) игры Γ примет вид $(x^P = (x^P_{K_1}, \dots, x^P_{K_\omega}), (f_{K_1}(x^P), \dots, f_{K_\omega}(x^P)))$.

В качестве приложения найден явный вид КЭР дифференциальной позиционной линейно-квадратичной игры шести лиц

$$\Gamma_a = \Big\langle \mathbb{N}, \big\{K_1 = \{1,2,3\}, K_2 = \{4,5,6\}\big\}, \Sigma_x, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}},$$
$$\{\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0)\}_{i\in\mathbb{N}} \Big\rangle,$$

где управляемая система $\Sigma_x \div \dot{x} = A(t)x + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} u_i,\ x(t_0) = x_0$. Здесь, фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$, $C_{n\times n}[0,\vartheta]$ — множество непрерывных на $[0,\vartheta]$ $n\times n$-матриц, $A(\cdot) \in C_{n\times n}$; постоянная $t_0 \in [0,\vartheta)$, коалиционная структура $\mathcal{K} = \{K_1, K_2\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6\}$; $\mathfrak{A}_i$ — множество стратегий i-го игрока

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x \mid \forall\, Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\};$$

функция выигрыша i-го игрока зададим функционалом

$$\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{6} u'_j[t] D_{ij} u_j[t]dt.$$

При специальных ограничениях на знакоопределенность квадратичных форм $x'C_i x$, $u'_j D_{ij} u_j$ $(i,j = 1,\dots,6)$ ($n\times n$-матрицы C_i

и D_{ij} постоянны и симметричны), а также соотношений между максимальными (по абсолютной величине) корнями характеристических уравнений для матриц D_{ij} найден явный вид КЭР

$$(\mathcal{J} = (\mathcal{J}^P_{K_1}, \mathcal{J}^P_{K_2}), U^P = (U^P_{K_1}, U^P_{K_2})) \in \mathbb{R}^6 \times \mathfrak{A}_{K_1} \times \mathfrak{A}_{K_2},$$

здесь

$$\begin{cases} \underset{U_{K_1}\in\mathfrak{A}_{K_1}}{MAX}{}^P \mathcal{J}_{K_1}(U_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}_{K_1}(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}^P_{K_1}, \\ \underset{U_{K_2}\in\mathfrak{A}_{K_2}}{MAX}{}^P \mathcal{J}_{K_2}(U^P_{K_1}, U_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}_{K_2}(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}^P_{K_2}, \end{cases}$$

$\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Заметим, что КЭР совпадает с равновесием по Нэшу в случае, когда все коалиции состоят только из единственного игрока.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

ON ASYMPTOTIC STABILIZATION OF NONLINEAR PERIODIC DISCRETE-TIME SYSTEMS

Зайцев В.А.

Удмуртский государственный университет,
ул. Университетская, 1, г. Ижевск, 426034, Россия

verba@udm.ru

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему управления с дискретным временем

$$x(t+1) = F\big(t, x(t), u(t)\big). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления, $t \in \mathbb{Z}$, и $F(t, 0, 0) \equiv 0$. Исследуется задача равномерной локальной (или глобальной) асимптотической стабилизации системы (1): требуется построить управление в виде обратной связи $u(t) = \widehat{u}\big(t, x(t)\big)$, где $\widehat{u}(t, 0) \equiv 0$, в системе (1) так, чтобы нулевое решение $x = 0$ замкнутой системы $x(t+1) = F\Big(t, x(t), \widehat{u}\big(t, x(t)\big)\Big)$ было равномерно локально (или глобально) асимптотически устойчивым.

Предполагаем, что для всякого $t \in \mathbb{Z}$ функция $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^r \ni (x, u) \mapsto F(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$ имеет класс C^1 по x и класс C^2 по u; $\mathcal{D}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{D}$. Предположим, что функция F является периодической по $t \in \mathbb{Z}$ с периодом $\omega \in \mathbb{N}$, т.е. $F(t+\omega, x, u) = F(t, x, u)$ для всех $(t, x, u) \in \mathbb{Z}\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^r$. Напомним, что $\gamma \in \mathcal{K}$ означает, что функция $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна, строго возрастает и $\gamma(0) = 0$; $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ означает, что $\gamma \in \mathcal{K}$ и $\gamma(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Обозначим $f(t, x) := F(t, x, 0)$, $G(t, x, u) := \int_0^1 \frac{\partial F(t,x,\upsilon)}{\partial \upsilon}\big|_{\upsilon=\theta u} d\theta$. Тогда имеем $F(t, x, u) - f(t, x) = G(t, x, u)u$. Обозначим $f^0(t_0, x_0) := x_0$, $f^i\big(t_0, x_0\big) := f\big(t_0 + i - 1, f^{i-1}(t_0, x_0)\big)$, $i \in \mathbb{N}$. Построим $n \times r$-матрицу $g(t, x) := G(t, x, 0)$.

Определим матрицу $K(t, x) := \dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$. Построим следующие матрицы: $N_1(\tau, x) := g(\tau, x)$,

$$N_{i+1}(\tau, x) := \Big[K\big(\tau + i, f^i(\tau, x)\big)N_i(\tau, x), g\big(\tau + i, f^i(\tau, x)\big)\Big], \quad i \geqslant 1.$$

Теорема 1. 1. Пусть система (1) является ω-периодической. Предположим, что существует функция $\mathbb{Z}\times\mathcal{D} \ni (t, x) \mapsto V(t, x) \in \mathbb{R}$ класса C^2 по x, удовлетворяющая следующим условиям:

(A) $V(t + \omega, x) \equiv V(t, x)$, $t \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{D}$;

(B) $V(t, 0) \equiv 0$, и существует функция $\gamma \in \mathcal{K}$ такая, что выполнено неравенство $V(t, x) \geqslant \gamma(|x|)$ для всех $t \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{D}$;

(C) $\Delta_f V(t, x) := V\big(t + 1, f(t, x)\big) - V(t, x) \leqslant 0$, $t \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathcal{D}$;

(D) $\forall t \in \mathbb{Z}$ $\left(\dfrac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0\right)$.

Предположим, что выполнено следующее ранговое условие: для некоторой окрестности $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ нуля

$$\exists t_0 \in \mathbb{Z} \;\; \forall x \in \mathcal{W} \setminus \{0\} \;\; \exists \nu \geqslant 1 \;\; \operatorname{rank} N_\nu(t_0, x) = n.$$

Тогда система (1) равномерно локально асимптотически стабилизируема в нуле с помощью сколь угодно малой ограниченной обратной связи $u(t) = \widehat{u}\big(t, x(t)\big)$.

2. Предположим, что дополнительно выполнены следующие условия: $\mathcal{D} = \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ и $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$. Тогда система (1) равномерно глобально асимптотически стабилизируема в нуле с помощью сколь угодно малой ограниченной обратной связи $u(t) = \widehat{u}\big(t, x(t)\big)$. □

Доказательство теоремы 1 использует дискретный вариант принципа инвариантности Красовского–Ла Салля, который обеспечивает условия равномерной локальной и глобальной асимптотической устойчивости периодических систем.

Теорема 1 обобщает некоторые результаты работ [1, 2] о стабилизации аффинных периодических систем с дискретным временем на общие нелинейные периодические системы с дискретным временем.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ, проект FEWS-2024-0009.

Литература

1. Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S., Zaitsev V., "Uniform asymptotic stabilization of affine periodic discrete-time systems," *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 4646–4652 (2020).
2. Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S., Zaitsev V., "Uniform global asymptotic stabilization of semilinear periodic discrete-time systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67, No. 7, 3598–3605 (2022).

О ПОСТРОЕНИИ ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В УПРАВЛЕНИИ

ON THE CONSTRUCTION OF A DIGITAL CONTROLLER FOR A SWITCHED LINEAR SYSTEM WITH COMMENSURATE DELAYS IN CONTROL

Ильин А.В., Фурсов А.С.

МГУ ВМК, Ленинские горы, д.1., стр. 52, Москва, 119991, Россия

{iline, fursov}@cs.msu.ru

В настоящей работе исследуется задача цифровой стабилизации переключаемой линейной системы в случае, когда ее режимы имеют различные запаздывания в управлении. А именно, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma), \\ y(t) = c_\sigma x(t), \end{cases} \qquad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\sigma : R_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал);

$S_{0,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ, точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, ...$; $x \in R^n$ — вектор состояния, $y \in R$ — измеряемый скалярный выход, $u \in R$ — управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A : I \to \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$, $c_\sigma = c \circ \sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1, \dots, b_m\}$, $c : I \to \{c_1, \dots, c_m\}$, $\theta : I \to \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ — величины постоянных запаздываний, причем θ_i/γ, θ_i/θ_j — рациональные числа для любой пары i, $j \in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t - \theta_i), \\ y(t) = c_i x(t). \end{cases}$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + b_{\sigma(t)} u(t - \theta_\sigma), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Требуется для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\gamma > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_{0,\gamma}$ построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{T}\right]} u[jT] S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \end{cases} \tag{4}$$

обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_\sigma x[lT], \\ \qquad \sigma(t) \in S_{0,\gamma},\ x(0) = x_0,\ v[0] = v_0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$
u(t-\theta_i) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{t-\theta_i}{T}\right]} (Hv[lT] + hc_\sigma x[lT])S(t-\theta_i - jT), \text{ если } t \geqslant \theta_i, \\ 0, \text{ если } 0 \leqslant t < \theta_i, \end{cases} \tag{6}
$$

Система (5) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = \left[\frac{t}{T}\right]$, т.е.

$$
lT \leqslant t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots .
$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$, существует $l_0 \in N$ такое, что $\gamma = l_0 T$ и для любого i найдется такое $l_i \in N$, что $\theta_i = l_i T$), $[\cdot]$ — целая часть действительного числа, $Q \in R^{r\times r}$, $q \in R^{r\times 1}$, $H \in R^{1\times r}$, $h \in R$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [2, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (5) называем *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, а регулятор (2)-(4) *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$
\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \to 0, \text{ при } t \to +\infty, \ l = \left[\frac{t}{T}\right], \tag{7}
$$

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подход, разработанный в статье [1], где исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием, одинаковым для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате, для ее решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага — переход от исходной непрерывной системы к ее точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Модифицируя указанный подход с учетом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1), предложена общая схема построения цифрового регулятора (2)-(4), включающая следующие основные шаги:

1) переход от непрерывной системы (1) к ее точной дискретной модели с учетом, что на ее входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель является переключаемой дискретной системой с режимами, описываемыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);

2) описание режимов полученной дискретной модели с помощью передаточных функций;

3) построение семейства $\mathcal{R}$ одновременно стабилизирующих регуляторов на основе алгоритма SIVIA [3, с. 81] для режимов дискретной модели, представленных передаточными функциями;

4) построение процедуры поиска на множестве $\mathcal{R}$ стабилизирующего дискретного регулятора вида (4) с использованием метода расширения динамического порядка [4, с. 205] и достаточного условия устойчивости переключаемых дискретных систем на основе метода функций Ляпунова [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература

1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С. "Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении,"*Дифференц. уравнения*, Т. 54, No. 8, 1132-1141 (2018).
2. Поляков К. Ю. *Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие*, СПбГМТУ, (2002).
3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. *Прикладной интервальный анализ*, М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, (2007).
4. Фурсов А.С. *Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов*, – М.: АРГАМАК-МЕДИА, (2016).

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

ON THE CONTROLLABILITY OF ONE LINEAR NONSTATIONARY SYSTEM

Корнеева О.А., Мастерков Ю.В.

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, ул. Горького, 87, Владимир, 600000, Россия

korneevaolya@bk.ru, Jura.masterkov@yandex.ru

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, \tau], \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

в предположении, что функция $t \to (A(t), B(t))$ — кусочно-постоянна на отрезке $[0, \tau]$.

В качестве *допустимых управлений* системы (1) берутся всевозможные измеримые функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. *Решение* системы (1) понимается в смысле Каратеодори.

Пусть $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \ldots t_{k-1})$ – $k-1$-мерный вектор, определяющий разбиение отрезка $[0, \tau]$ $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < \tau \doteq t_k)$ на k отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, k}$. Предполагается, что $(A(t), B(t)) = (A_i, B_i)$ на промежутках $\Delta_i \doteq (t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, k}$.

Обозначим через ξ_i систему $\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, а L_i – пространство управляемости системы ξ_i. Известно, (см. [1]) что L_i – суть линейная оболочка столбцов матрицы управляемости системы ξ_i, т. е. $L_i = Lin(B_i, A_i B_i, \ldots, A_i^{n-1} B)$.

Лемма. *Пусть $k = 2$, т.е. $[0, \tau] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2]$ и $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\tau > 0$ система (1) вполне управляема в $\mathbb{R}^n$.*

Теорема. *Пусть $L_1 + L_2 + \ldots + L_k = \mathbb{R}^n$. Тогда существует $\vartheta_0 > 0$, что для любого разбиения $\theta \doteq (t_1, t_2, t_3 \ldots t_{k-1})$ отрезка $[0, \tau]$, такого, что $t_i - t_{i-1} < \vartheta_0$, $i = \overline{1, k}$ система (1) вполне управляема в $\mathbb{R}^n$.*

Литература

1. Ли Э.Б, Маркус Л. *Основы теории оптимального управления*, М: Наука, (1972).

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СКОЛЬЗЯЩИМИ РЕЖИМАМИ

TO INVERSE PROBLEMS OF CONTROL SYSTEMS WITH SLIDING MODES

Крупенников Е.А.

ИММ УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16.

krupennikov@imm.uran.ru

Рассматриваются обратные задачи динамики для аффинно-управляемых детерминированных систем. А именно — задача реконструкции неизвестных управлений по неточным дискретным замерам порождаемой этими управлениями траектории.

Задачи реконструкции управлений исследовались многими авторами. Отметим подход, предложенный в работах Ю. С. Осипова и А. В. Кряжимского [1]. Этот подход опирается на процедуру оптимального прицеливания, истоки которой лежат в работах школы Н. Н. Красовского по теории позиционного оптимального управления [2].

В докладе обсуждается задача реконструкции управлений для систем с невыпуклыми ограничениями на управления. В подобных системах могут возникать управления со скользящими режимами. Для таких систем возникает ряд вопросов, связанных с постановкой задачи.

Как известно, задача реконструкции управления некорректна. Корректная постановка задачи реконструкции состоит в выделении среди всех допустимых управлений, порождающих наблюдаемую траекторию, одного — нормального, и реконструкции этого управления. Предлагается корректная постановка задачи реконструкции для случая невыпуклых ограничений, опирающаяся на теорию обобщенных управлений [3,4].

Более того, возникает вопрос способа аппроксимации нормального управления. Так, например, методы, развитые на основании подхода [1], позволяют строить L^2-аппроксимации нормального управления, удовлетворяющие заданным геометрическим ограничениям. Однако, в случае невыпуклых ограничений на управления невозможно гарантировать существование сходящихся в пространстве L^2 допустимых аппроксимирующих управлений.

Основной результат работы — постановка и обоснование корректной задачи реконструкции скользящих управлений по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории движения системы для случая невыпуклых геометрических ограничений на управления. Показано, что в таком случае можно строить кусочно-постоянные аппроксимации, удовлетворяющие заданным невыпуклым ограничениям, сходящиеся к нормальному управлению в смысле слабой со звездой сходимости в топологии пространства, сопряженного пространству непрерывных функций.

Разработан численный алгоритм построения аппроксимаций решения поставленной задачи [5].

Литература

1. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. "О моделировании управления в динамической системе", *Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика*, 2, 51–60 (1983).
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, М.: Наука (1974).
3. Гамкрелидзе Р.В., *Основы оптимального управления*, Изд-во Тбилисского ун-та (1975).
4. Варга Дж., *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, М.: Наука (1977).
5. Subbotina N.N., Krupennikov E.A., To the dynamic reconstruction problem with non-convex geometrical restrictions on the controls, *Communications in Optimization Theory*, 2022, p. 22 (2022).

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ТРАЕКТОРИЯМИ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH INTERSECTING TRAJECTORIES OF DEGENERATE STATE EQUATION

Курина Г.А.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, г. Воронеж, 394018, Россия

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, ул. Вавилова, 44/2, г. Москва, 119333, Россия

Хоай Н.Т.

Научный Университет, Вьетнамский Национальный Университет, Нгуен Трай, 334, г. Ханой, Вьетнам

Доклад основан на статье [1], в которой рассматривается новый метод построения асимптотического приближения любого порядка для решения задачи

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^T \left(F(t,\varepsilon)x + S(t,\varepsilon)y + \frac{1}{2}\varepsilon R(t,\varepsilon)u^2 \right) dt \to \min_u,$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + B(t,\varepsilon)y + \varepsilon C(t,\varepsilon)u + f(t,\varepsilon),\ x(0,\varepsilon) = x^0,\ x(T,\varepsilon) = x^T.$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(x,y,t,\varepsilon) + \varepsilon D(t,\varepsilon)u.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $t \in [0,T]$, $T > 0$ фиксировано, $x = x(t,\varepsilon) \in I\!R^m$, $y = y(t,\varepsilon) \in I\!R$, $u = u(t,\varepsilon) \in I\!R$, $R(t,0) > 0$, все заданные функции достаточно гладкие относительно своих аргументов.

При $\varepsilon = 0$ получается вырожденное уравнение состояния

$$\frac{dx}{dt} = A(t,0)x + B(t,0)y + f(t,0),$$

$$0 = G(x,y,t,0). \tag{1}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

I. Уравнение (1) имеет два решения относительно быстрой переменной: $y = y^1(x,t)$ и $y = y^2(x,t)$.

II. Задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t,0)x + B(t,0)y^1(x,t) + f(t,0), \qquad x(0) = x^0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = A(t,0)x + B(t,0)y^2(x,t) + f(t,0), \qquad x(T) = x^T$$

имеют единственные решения $x^1(t)$ и $x^2(t)$ соответственно.

III. Кривые $x^1(t)$ и $x^2(t)$ пересекаются друг с другом в одной фиксированной точке $t = t_1 \in (0,T)$.

IV. $G_y(x^1(t), y^1(x^1(t),t),t,0) > 0$ для $t \in [0,t_1]$,
$G_y(x^2(t), y^2(x^2(t),t),t,0) < 0$ для $t \in [t_1,T]$.

При дополнительных предположениях V-VII, сформулированных в [1], построено асимптотическое решение двухточечной краевой задачи, вытекающей из принципа максимума Понтрягина, для функции $v(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon)^T,\ \varphi(t,\varepsilon)^T,\ y(t,\varepsilon)\ ,\ \psi(t,\varepsilon))^T$ ($\varphi(t,\varepsilon)$ and $\psi(t,\varepsilon)$) – сопряженные переменные), имеющее вид $v(t,\varepsilon) = \overset{(1)}{v}(t,\varepsilon)$ при $t \in [0,t_1]$ и $v(t,\varepsilon) = \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon)$ для $t \in [t_1,T]$, где

$$\overset{(j)}{v}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{\overline{v}}(t,\varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi}v(\tau_{j-1},\varepsilon) + \overset{(j)}{Q}v(\tau_j,\varepsilon),\ \ t \in [t_{j-1},t_j],\ \ j = 1,2,$$

$\overset{(j)}{\overline{v}}(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{\overline{v}}_i(t)$, $\overset{(j)}{\Pi}v(\tau_{j-1},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{\Pi}_i v(\tau_{j-1})$, $\overset{(j)}{Q}v(\tau_j,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{Q}_i v(\tau_j)$, $t_0 = 0$, $t_2 = T$, $\tau_j = (t - t_j)/\varepsilon$, $j = 0,1,2$. Черта сверху означает регулярные функции, зависящие от t. Символы $\overset{(j)}{\Pi}$ и $\overset{(j)}{Q}$ обозначают пограничные функции экспоненциального типа, зависящие от τ_{j-1} и τ_j соответственно, $j = 1,2$. Для построения асимптотического решения на $[0,t_1]$ используется функция $y^1(x,t)$, а на $[t_1,T]$ – $y^2(x,t)$.

Предлагаемый метод построения асимптотики основан на решении задач с фиксированным условием в начале или в конце отрезка $[0,T]$.

Литература

1. Курина Г.А., Хоай Н.Т., “Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния,” *Прикладная математика & Физика*, 55, No. 4, 313–329 (2023).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОСЕТИ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

ON A CONTROL PROBLEM IN AN ELECTRICAL NETWORK OF LONG LINES IN THE PRESENCE OF DISTURBANCES

Ливанов Н.Д., Изместьев И.В.

ФГБОУ ВО "ЧелГУ ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Рассматривается задача управления гиперболической системой, которая описывает передачу сигнала из k генераторов в n нагрузок (импедансов) через длинные линии. Управлением являются напряжения генераторов сигнала, которые находятся на левых концах длинных линий. Напряжения на правых концах длинных линий формируются помехами. Функции внешних возмущений точно неизвестны, а заданы только оценки их возможных значений. Цель выбора управления заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени модуль линейной функции, определяемой с помощью средних величин напряжений и сил тока, не превышал заданного значения при любых допустимых совокупностях внешних возмущений и помех. Разработана методика сведения этой задачи к одномерной задаче управления при наличии помехи. Найдены необходимые и достаточные условия окончания.

Пусть дана система n телеграфных уравнений [1], описывающих малые колебания напряжения и тока в электросети длинных линий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_i(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial J_i(t,x)}{\partial x} - \dfrac{R}{L}V_i(t,x) + f_i^{(1)}(t,x) \\ \dfrac{\partial J_i(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial V_i(t,x)}{\partial x} - \dfrac{G}{C}J_i(t,x) + f_i^{(2)}(t,x), \end{cases} \qquad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant p$ и $0 \leqslant x \leqslant l$, l — длина линии; для i–той длинной линии функции $V_i(x,t)$ и $J_i(x,t)$ описывают изменение напряжения и силы тока, соответственно. Каждая длинная линия характеризуется следующими параметрами: сопротивлением R, индуктивностью L, электроемкостью C, коэффициентом утечки G. В начальный момент $t=0$ заданы законы распределения $V_i(x,t) = g_i^{(1)}(x)$, $J_i(x,t) = g_i^{(2)}(x)$, где функции $g_i^{(j)}(x)$, $i=\overline{1,n}$, $j = 1,2$, являются непрерывными. Считаем, что напряжения $V_i(0,t)$ и $V_i(l,t)$ на концах i-й линий изменяются согласно уравнениям

$$V_i(0,t) = a_i^{(1)}(t) + a_i^{(2)}(t)D_i\overline{\xi}(t), \quad a_i^{(2)}(t) \geqslant 0. \tag{2}$$

$$V_i(l,t) = b_i^{(1)}(t) + b_i^{(2)}(t)\eta_i(t), \quad b_i^{(2)}(t) \geqslant 0. \tag{3}$$

Функции $a_i^{(j)}(t)$, $b_i^{(j)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, $j=1,2$, непрерывны на $[0,p]$. Вектор-функция $\overline{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)\dots, \xi_k(t))^\top \in U \subset \mathbb{R}^k$, где U компакт, является управлением. Функции $\eta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, такие, что $|\eta_i(t)| \leqslant 1$, являются помехами. С помощью матрицы D размерности n на k задается выбор соответствующего одномерного управления $\xi_r(t)$ для левого конца каждой линии. За D_i обозначается i-я строка матрицы D.

Непрерывных функции $f_i^{(j)}(t,x)$, определяющие внешние возмущения, не заданы точно, но известны их оценки:

$$\widehat{f}_i^{(j)}(t,x) \leqslant f_i^{(j)}(t,x) \leqslant \tilde{f}_i^{(j)}(t,x), \quad j=1,2, \quad i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Функции $\widehat{f}_i^{(j)}(t,x)$, $\tilde{f}_i^{(j)}(t,x)$ являются непрерывными.

Заданы числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geqslant 0$ и вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, где $\lambda_i > 0$. Цель выбора управления $\overline{\xi}(t)$ в (2) — осуществить неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^l \left(V_i(p,x)\sigma_1(x) + J_i(p,x)\sigma_2(x)\right) dx - \alpha \right| \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

при любых допустимых реализациях помех $\eta_i(t)$ (3), $i=\overline{1,n}$, и для любых непрерывных функций $f_i^{(j)}(t,x)$ (4), $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,2}$. Здесь $\sigma_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j=\overline{1,2}$, заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\sigma_j(0)=\sigma_j(l)=0$.

После замены переменных задача (1)–(3), (5) сводится к одномерной однотипной задаче управления при наличии помехи [2]

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1, \quad |z(p)| \leqslant \varepsilon.$$

Найдены необходимые и достаточные условия окончания, при которых существует управление $\overline{\xi}$, гарантирующее достижении цели (5) при любых допустимых помехах (3) и неизвестных функциях (4).

Литература

1. Кошляков Н.С., *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, ОНТИ, (1936).
2. Ухоботов В.И., *Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями*, Учеб. пособие. Челябинск: Челябинский государственный университет (2005).

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУНОЙ

ASYMPTOTICALLY OPTIMAL CONTROL OF A CLOSED STRING

Локуциевский Л.В.

МИАН имени В.А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва, 119991, РФ

На докладе я расскажу о задаче оптимального управления простейшей распределенной колебательной системой — замкнутой струной, к которой прилагается ограниченная нагрузка в одной выделенной точке. Задача по существу бесконечномерна, а управление — одномерно. Тем не менее, удается дать точное описание тех состояний струны, которые можно привести в состояние покоя, а также найти асимптотически точное выражение для требуемого времени. С использованием асимптотических множеств достижимости строится управление по обратной связи, которое оказывается асимптотически оптимальным. Основной результат состоит в точных алгебраических формулах для асимптотической формы множеств достижимости, асимптотически оптимального времени, а также для построенного таким образом асимптотически оптимального управления.

Литература

1. Л. В. Локуциевский, А. И. Овсеевич, “Асимптотическая теория управления для замкнутой струны. II,” *Труды МИАН*, 321, 194–214 (2023).

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧАХ ОБРАЩЕНИЯ И УСТОЙЧИВОГО УПРАВЛЕНИЯ

REGULARIZED FEEDBACK IN INVERSE AND ROBUST CONTROL PROBLEMS

Максимов В.И.

ИММ Уро РАН, ул. С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620091 Россия

maksimov@imm.uran.ru

В докладе обсуждаются некоторые вопросы развития подхода к решению задач онлайн восстановления структурных характеристик динамических систем [1], а также гарантированного управления [2] в условиях дефицита информации, основы которого восходят к работам Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского. Подход ориентирован на исследование с единых позиций широкого круга указанных выше задач для различных классов динамических систем.

Задачи онлайн восстановления меняющихся во времени неизвестных характеристик часто относят к задачам идентификации. Подход, к решению таких задач, предложенный в работах указанных выше авторов ориентирован на случай, когда предполагается, что входная информация, например, результаты измерения текущих фазовых положений системы, поступает по ходу процесса и неизвестные характеристики должны восстанавливаться также по ходу процесса. Этот подход, основанный на комбинации методов позиционного управления с методами решения некорректных задач, фактически сводит задачу идентификации к задаче управления некоторой подходящим образом сконструированной вспомогательной системой, Управление в которой адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. При этом регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора позиционного управления вспомогательной системой. Сформулированный подход был реализован для ряда задач, описываемых некоторыми классами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также уравнениями с распределенными параметрами. При этом восстанавливались различные переменные характеристики систем: неизвестные разрывные входные воздействия, начальные и граничные данные, распределенные возмущения, коэффициенты эллиптического оператора и т.д.

В теории управления большой интерес вызывают задачи гарантированного или, как часто говорят, робастного управления. Эти задачи могут быть охарактеризованы в общих чертах следующим образом. Имеется динамическая система, на которую одновременно действуют управление и ненаблюдаемое возмущение. Диапазон допустимых возмущений велик и как-то заранее охарактеризован. По ходу функционирования системы поступает некоторый сигнал о ее текущих состояниях. Требуется построить закон формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы желаемый режим для траектории системы независимо от того, какое конкретное возмущение действует. Задача существенно усложняется, когда речь идет о измерении не всех координат, а либо части из них, либо линейной комбинации координат. В этом случае при решении задачи управления возникает довольно часто проблема вычисления (в ходе построения разрешающего задачу закона формирования обратной связи), возможно с ошибками, реализующихся в процессе управления неизвестных фазовых координат. Подход Ю.С.Осипова и А.В. Кряжимского ориентирован на исследования именно таких задач управления.

Литература

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., *Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions*, Gordon and Breach, (1995).
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И., *Позиционные дифференциальные игры*, М.: Наука, (1984).

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ON SOME PURSUIT PROBLEMS IN DIFFERENTIAL GAMES WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

Мачтакова А.И., Петров Н.Н.

Институт математики и механики УрО РАН, ул. С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108, Россия
Удмуртский университет, ул. Университетская, 1, Ижевск, 426034, Россия

`bichurina.alyona@yandex.ru, kma3@list.ru`

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения

$$D^{(\alpha)} x_i = a_i x_i + u_i,\ x_i(0) = x_i^0,\ u_i \in U_i,$$
$$D^{(\alpha)} y_j = b_j y_j + v_j,\ y_j(0) = y_j^0,\ v_j \in V_j.$$

Здесь $x_i, y, x_i^0, y_j^0, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, U_i, V_j — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha \in (0, 1)$, $D^{(\alpha)} x$ — производная по Капуто [3] функции x порядка α, a_i, b_j — вещественные числа. Кроме того, $x_i^0 - y_j^0 \notin M_{ij}$ для всех $i \in I$, $j \in J$, где M_{ij} — заданные выпуклые компакты. Считаем, что преследователи в процессе игры используют квазистратегии.

Дополнительно предполагается, что каждый убегающий E_j, $j \in J$ не покидает пределы выпуклого конуса с непустой внутренностью

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k : (p_s, y) \leqslant 0,\ s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$. Если $\Omega = \mathbb{R}^k$, то считаем, что $r = 0$. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $G(n, m, z^0)$.

Введем следующие обозначения.

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)} - \begin{array}{c}\text{обобщенная функция}\\ \text{Миттаг–Лефлера,}\end{array}$$

$$f_i(t) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1), \quad g_j(t) = E_{1/\alpha}(b_j t^\alpha, 1),$$

$$f_i(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}\big(a_i (t - \tau)^\alpha, \alpha\big),$$

$$g_j(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}\big(b_j (t - \tau)^\alpha, \alpha\big),$$

$$F_i(t) = \int_0^t f_i(t, \tau)\, d\tau, G_j(t) = \int_0^t g_j(t, \tau)\, d\tau,$$

Теорема 1. Пусть в игре $G(n, 1, z^0)$ для всех $i \in I$ имеет место $M_{i1} = \{0\}$, $U_i = \{u_i : \|u_i - b_i\| \leqslant R_i\}$, $V_1 = \{v : \|v - b_1\| \leqslant R$ и существует вектор $p \in R^k$, $\|p\| = 1$ такой, что для всех $i \in I$, $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$\|b + Rp\| G_1(t) \geqslant (\|b_i\| + R_i) F_i(t), \quad g_1(t) \geqslant f_i(t),$$

$$(b_1 + Rp, y_1^0) \geqslant 0,\ (b_1 + Rp, y_1^0) \geqslant \max_{i \in I} (b_1 + Rp, x_i^0).$$

Тогда в игре $G(n, 1, z^0)$ происходит уклонение от встречи.

В докладе также будут приведены

1. Достаточные условия поимки всех убегающих в игре $G(1, m, z^0)$.
2. Достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих, при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего.

3. Достаточные условия поимки в игре с жестко скоордииниро-ванными убегающими.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

Литература

1. Григоренко Н.Л., *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*, М.: Изд-во МГУ (1990).
2. Петров Н.Н., Мачтакова А.И. "Линейная задача группового преследования с дробными производными, простыми матрицами и разными возможностями игроков," *Дифференциальные уравнения*, 59, No. 7, 933-943 (2023).
3. Caputo M. "Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II," *Geophys. R. Astr. Soc.*, 13, 529–539 (1967).

СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

SUB-RIEMANNIAN PROBLEM ON THE CENTRAL EXTENSION OF THE GROUP OF MOTIONS OF A PLANE

Маштаков А.П.

ИПС им А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль–Залесский, 152020, Россия

alexey.mashtakov@gmail.com

Доклад посвящен исследованию четырехмерного расширения модели Петито-Читти-Сарти [1] завершения контуров зрительной корой головного мозга. Конфигурационное пространство нейронов зрительной коры интерпретируется как центральное расширение группы движений плоскости $M = \overline{SE}(2)$. Левоинвариантное распределение касательных подпространств моделирует возможные направления установления нейронной связи. Субриманово расстояние пропорционально энергии, затрачиваемой на активацию промежуточных нейронов между двумя возбужденными пограничными нейронами. В исследуемой модели поврежденные контуры изображения восстанавливаются с помощью субримановых геодезических в пространстве M положений, ориентаций и толщин контуров. Альтернативное уточнение, путем включения кривизны контуров, предложено в работе [2].

Рассматриваемая субриманова структура является структурой с максимально неинтегрируемым двумерным распределением на четырехмерной группе Ли. Такие структуры называются структурами энгелева типа. Полная классификация субримановых структур энгелева типа получена в работе [3]. Согласно классификации существует двухпараметрическое семейство таких структур. Методами геометрической теории управления [4] исследуется задача поиска геодезических на M.

Задача формулируется в виде задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\beta}u_1 + \alpha\sqrt{\beta}u_2, \\ \dot{x} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\beta}}u_2, \\ \dot{y} = -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\beta}}u_2, \\ \dot{k} = -ku_2, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (\theta, x, y, k) \in SE(2) \times \mathbb{R}^+ = M, \\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \gamma(0) = (0,0,0,1),\ \gamma(T) = (\theta_1, x_1, y_1, k_1), \\ \int\limits_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt \to \min, \end{array}$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > 0$ — параметры, которые однозначно (с точностью до локальных изометрий) определяют субриманову структуру на M.

Доказаны полная управляемость и существование оптимальных управлений. С помощью принципа максимума Понтрягина выписана гамильтонова система на экстремали. Получено явное выражение аномальных геодезических и доказана интегрируемость по Лиувиллю нормального геодезического потока для всего семейства субримановых структур. В частном случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$ получено явное выражение для экстремальных управлений и траекторий.

Доклад основан на совместной работе с И. Галяевым. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00140).

Литература

1. Citti G., Sarti A., “A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space,” *J. Math. Imaging Vis.* No. 24, 307–326 (2006).
2. Galyaev I., Mashtakov A., “Liouville Integrability in a Four-Dimensional Model of the Visual Cortex,” *Journal of Imaging*, No. 7(12):277 (2021).
3. Almeida D.M., “Sub-Riemannian homogeneous spaces of Engel type,” *J. Dyn. Control Syst.*, No. 20(2) 149–166 (2014).
4. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л., *Геометрическая теория управления*, М: Физматлит, (2005).

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ ЛОКАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ШАР И БАЛКА

OPTIMAL CHATTERING TRAJECTORIES IN LOCAL STABILIZATION PROBLEM FOR THE BALL AND BEAM SYSTEM

Мельников Н. Б.

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

melnikov@cs.msu.ru

Ронжина М. И.

РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Москва, 119991, Россия

ronzhina.m@gubkin.ru

Наряду с перевернутым маятником на подвижном основании, система шар и балка является одной из основных для тестирования методов управления и стабилизации [1, 2]. Однако во многих работах шар моделируют как точечную массу, либо используют другие предположения, связанные с шаром, которые не имеют физического обоснования (сравнение различных моделей шара и балки см., напр., в [3]).

Мы рассматриваем систему, состоящую из шара массы m и радиуса R, который может катиться вдоль балки без проскальзывания. Считаем, что балка приводится во вращение в вертикальной плоскости за счет приложенного крутящего момента u в точке вращения. Тогда уравнения движения имеют вид [2]

$$\begin{gathered}\left(\frac{I_b}{R} + mR\right)\ddot{r} - (I_b + mR^2)\ddot{\theta} - mR\dot{\theta}^2 r + mgR\sin\theta = 0,\\ (I + mr^2)\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}\dot{r}r - mR\dot{\theta}^2 r + mgr\cos\theta = u,\end{gathered} \tag{1}$$

где I и I_b — моменты инерции балки и шара соответственно, θ — угол отклонения балки от положения равновесия, а r — расстояние от точки контакта шара с балкой до неподвижной оси вращения балки.

Вблизи точки равновесия получаем линеаризованные уравнения движения

$$\begin{gathered}\ddot{r} - R\ddot{\theta} + \frac{mg}{\big(I_b/R^2 + m\big)}\theta = 0,\\ I\ddot{\theta} + mgr = u.\end{gathered} \tag{2}$$

В качестве дальнейшего упрощения часто полагают, что управление происходит непосредственно угловым ускорением балки: $\ddot{\theta} = u$. Тогда уравнения движения (2) принимают более простой вид, не содержащий момент инерции балки:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{r} + \frac{mg}{\left(I_b/R^2 + m\right)}\theta = Ru,\\
&\ddot{\theta} = u.
\end{aligned}
$$

Нами исследована задача оптимального управления с квадратичным функционалом по фазовым переменным и ограниченным управлением. Для нелинейной системы (1) показано, что особой траекторией является начало координат, и изучено поведение неособых траекторий в окрестности особой с помощью теории режимов с учащающимися переключениями [4]. Для линеаризованной системы (2) построен оптимальный синтез. Доказано, что особые траектории имеют второй порядок, а оптимальные особые траектории приходят в начало координат. Полученные результаты справедливы для более широкого класса задач с линейной динамикой и являются обобщением результатов [5].

Литература

1. Формальский, А. М., *Управление движением неустойчивых объектов*, М.: ФИЗМАТЛИТ (2012).
2. Ронжина, М. И., Мельников, Н. Б. *Машинное обучение и оптимальное управление: линейно-квадратичные задачи*, М.: Изд. центр РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина (2023).
3. Lare, C., White, W. N., Hossain, S., “Motion Equations for the Ball and Beam and the Ball and Arc Systems,” *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, 141, No. 12, 121006 (2019).
4. Зеликин, М. И., Борисов, В. Ф., “Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления,” *Труды МИАН*, 197, 85–166 (1991).
5. Ронжина, М. И., “Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником,” *Прикладная математика и механика*, 80, № 1, 24–33 (2016).

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВРЕМЕНИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

ABOUT CONTINUITY OF OPTIMAL TIME FOR LINEAR TIME CONTROL PROBLEMS

Никольский М.С.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Губкина 8, Москва, 119991, Россия

mni@mi-ras.ru

1. Рассматривается линейный управляемый объект общего вида (см.[1–4])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, A — $n \times n$-матрица, B — $n \times p$-матрица, $u \in R^p$, причем на управляющий вектор u накладывается геометрическое ограничение $u \in U$, здесь U — выпуклый компакт, содержащий нулевую точку внутри себя, x_0 — начальное состояние управляемой системы. В качестве терминального множества M выступает нулевая точка из пространства R^n. Нас будет интересовать вопрос о функции времени оптимального быстродействия $T(x_0)$. В работе исследуется структура множества определения функции $T(x_0)$ и обосновывается непрерывность $T(x_0)$ на этом множестве при дополнительном предположении о ранге матрицы управляемости:

$$rank(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \tag{2}$$

Отметим, что наш результат (см. [5]) обобщает результат из Теоремы 22 [2] на стр. 160–161 в той его части, которая касается непрерывности $T(x_0)$.

В нашей работе [5] также рассмотрен нестационарный случай и получены соответствующие условия, гарантирующие непрерывность $T(x_0)$. В связи с этим следует отметить результаты Е.Л. Тонкова и его учеников о непрерывности $T(x_0)$ в нестационарном случае (см., например, [6,7]). Эти результаты, являясь более общими по форме, получены в более абстрактной форме, что затрудняет их использование при решении конкретных задач.

Отдельно рассматривался случай, когда терминальная точка отлична от нулевой точки. Простые примеры показывают, что здесь возможны разрывы функции $T(x_0)$ даже при выполнении условия управляемости (2). В нашей работе [8] получены достаточные условия, при которых функция $T(x_0)$ непрерывна в данной точке.

2. Была также рассмотрена задача оптимального быстродействия (1) с одноточечным терминальным множеством $M = 0$ при интегральном ограничении на управление $u(t)$ вида $\|u(\cdot)\| \leqslant \rho$, где

$$\|u(\cdot)\| = \left(\int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

здесь $u(t)$ — суммируемая по Лебегу вместе с $|u(t)|^2$ на $[0, +\infty)$ функция. Величина $\rho > 0$ имеет смысл ресурса управления. Задачи оптимального управления при интегральных управлениях рассматривались многими авторами (см., например, [2–4]). Мы изучали вопрос о непрерывности функции $T(x_0)$ при фиксированном $\rho > 0$ с терминальным множеством M=0. Полученные результаты см. в [9].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, (1961).
2. Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления*, Наука, (1972).
3. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*, Наука (1968).
4. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*, Наука, (1977).
5. Никольский М.С. “О непрерыности времени оптимального быстродействия как функции начального состояния для линейных управляемых объектов” *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, No 2, 31–38 (2023).
6. Родионова А.Г., Тонков Е.Л. “О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае” *Изв. вузов. Матем.*, No 5, 101–111 (1993).
7. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. “Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой” *Дифференц. уравн.*, No 1, 87–96 (2000).
8. Никольский М.С. “К вопросу о непрерывности времени оптимального быстродействия как функции начального состояния управляемой системы” *Труды “Прикладная математика и информатика”. Факультет ВМК МГУ*, No 72, 16–22 (2023).
9. Никольский М.С. “О непрерывности времени оптимального быстродействия как функции начального состояния для линейных управляемых объектов с интегральными ограничениями на управления” *Труды ИММ Уро РАН* , 1–10 (2024), в печати

МАШИНА ДУБИНСА: ТРЁХМЕРНЫЙ И ДВУМЕРНЫЙ ВАРИАНТЫ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЕ

DUBINS CAR: THREE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL VARIANTS OF THE REACHABLE SETS WITH AN INTEGRAL CONTROL CONSTRAINT

Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, ул. С. Ковалевской 16, Екатеринбург, 620137, Россия

patsko@imm.uran.ru

Используя опыт построения трёхмерных множеств достижимости машины Дубинса в случае геометрических ограничений на скалярное управление, авторы попытались по аналогии исследовать границу множеств достижимости при интегральных ограничениях.

Кинематика машины Дубинса записывается в виде

$$\dot{x} = \cos\varphi, \ \ \dot{y} = \sin\varphi, \ \ \dot{\varphi} = u.$$

Здесь x, y — геометрические координаты на двумерной плоскости; u — скалярное управление. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Полагаем $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Начальное условие: $t_0 = 0$, $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$.

Зададим интегральное ограничение $\displaystyle\int_0^{t_f} u^2(t)dt \leqslant \mu$, $\mu > 0$. Множество достижимости $G(t_f, \mu)$ в момент t_f есть совокупность всех трёхмерных фазовых состояний $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^{\mathsf{T}}$, в каждое из которых можно перейти в момент t_f при помощи кусочно-непрерывного управления $t \to u(t)$, удовлетворяющего интегральному ограничению.

Двумерное сечение трёхмерного множества достижимости при некотором значении угловой координаты φ назовём φ-сечением.

Несложно устанавливается, что структура множества достижимости зависит только от произведения $t_f{\cdot}\mu$. Это позволяет исследовать структуру только при $\mu = 1$ или же при $t_f = 1$. Ещё одно свойство симметрии говорит о том, что каждое φ-сечение зеркально симметрично относительно некоторой вспомогательной оси, проведённой через начало координат под углом $\varphi/2$. Имеется также симметрия φ-сечений при отрицательных и положительных значениях φ. Два последних свойства были справедливы и для случая геометрических ограничений на управление.

Опираемся на принцип максимума Понтрягина для движений, ведущих на границу множества достижимости при интегральном ограничении [1]. Исключаем из рассмотрения особое движение в силу $u(t)\equiv 0$. Доказываем, что граница множества $G(t_f, \mu)$ формируется при помощи 6 типов программных управлений на $[0, t_f]$ с не более чем двумя моментами смены знака. Управления типа U_1 (U_4) не меняют знак и принимают положительные (отрицательные) значения. Управления U_3 (U_2) изменяют знак один раз с "+" на "−" (с "−" на "+"). Управления U_6 (U_5) изменяют знак два раза: "−, +, −" ("+, −, +"). Каждому типу соответствует определённый участок границы трёхмерного множества. Исследуется сопряжение различных участков. Показывается, что для некоторого промежутка $[t_f^*(\mu), t_f^{**}(\mu)]$ множество $G(t_f, \mu)$ не является односвязным. При геометрическом ограничении также имели 6 типов, определяющих границу. Вместо положительных и отрицательных значений $u(t)$ использовались крайние значения. Управления U_1, U_2, U_3, U_4 содержали участки прямолинейного движения с $u(t)\equiv 0$.

При отождествлении угловой координаты по модулю 2π движения, ведущие на границу множества достижимости, называются эластиками Эйлера. Их свойства локальной и глобальной оптимальности по отношению к интегральному функционалу исследовались, например, в [2].

Двумерное множество достижимости строится в координатах x, y. Его структура хорошо известна [3, 4] при геометрическом ограничении на управление. При интегральном ограничении двумерное множество достижимости строим на базе трёхмерного. Используем полученное нами описание границы φ-сечений трёхмерного множества достижимости и краевое условие [5] для сопряжённой системы принципа максимума.

Литература

1. Гусев М.И., Зыков И.В., "Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях," *Тр. ИММ УрО РАН*, 23, No. 1, 103−115 (2017).
2. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л., "Решение задачи Эйлера об эластиках," *АиТ*, вып. 4, 78−88 (2009).

3. Марков А.А., “Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах,” *Сообщ. Харьков. матем. общ.*, 1, 2-я сер., выпуск 2, 250–276 (1889).
4. Cockayne E.J., Hall G.W.C., “Plane motion of a particle subject to curvature constraints,” *SIAM J. Control Optim*, 13, No. 1, 197–220 (1975).
5. Зыков И.В., “О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями,” *CEUR Workshop Proceedings*, 1894, 88–97 (2017).

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЭМБОЛИЗАЦИИ АВМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ANALYSIS OF AVM EMBOLIZATION PROBLEM BY OPTIMAL CONTROL THEORY METHODS

Петренко И.А.

ВлГУ, ул. Горького, д. 87, г. Владимир, 600000, Россия

petrenko_irina@bk.tu

Черевко А.А., Шарифуллина Т.С.

ИГиЛ СО РАН, пр. ак. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия

Церебральная артериовенозная мальформация (АВМ) является врожденной патологией развития сосудов головного мозга, при которой артериальное и венозное кровеносные русла соединены клубком беспорядочно переплетенных вырожденных сосудов. Одним из методов хирургического лечения данных патологий является эмболизация — это малоинвазивное вмешательство, представляющее собой внутрисосудистое заполнение клубка патологических сосудов специальным жидким твердеющим веществом (эмболическим агентом) с целью блокирования кровотока через них. Данный способ лечения широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов патологии. В работе математическое моделирование процесса эмболизации рассматривается совместно с постановкой задачи оптимального управления указанным процессом.

В данной работе для описания процесса эмболизации предлагается комбинированная модель, в которой наряду с совместным течением крови и эмболического агента внутри патологии учитывается перераспределение крови в окружающие здоровые сосуды. Процесс эмболизации моделируется как процесс двухфазной фильтрации несмешивающихся несжимаемых жидкостей, где вытесняемой фазой является кровь, а вытесняющей эмболический агент. Поток крови, поступающий в АВМ, меняется во время операции за счет перераспределения крови в соседние здоровые сосуды, в модели этот эффект учитывается путем введения дополнительных соотношений.

Основная цель работы заключается в отыскании оптимального с точки зрения безопасности и эффективности сценария эмболизации артериовенозной мальформации. Поставлена задача оптимального управления, где целевой функционал и ограничения выбираются в соответствии с медицинскими показаниями. Управлением является зависящая от времени функция, определяющая объёмный расход эмболического агента вещества на артериальном входе патологии. Задача оптимизации решается аналитически с использованием методов теории оптимального управления для задач с ограничениями в виде уравнений в частных производных. Кроме того, проводится сравнение полученного режима с выявленными ранее численно кандидатами на оптимальность.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00264).

Литература

1. Cherevko A.A., Gologush T.S., Petrenko I.A., Ostapenko V.V., Panarin, V.A., “ Modelling of the arteriovenous malformation embolization optimal scenario,” *Royal Soc. Open Sci.*, 7, No. 7, doi: 10.1098/rsos.191992 (2020).
2. Sharifullina T. Cherevko A., Ostapenko V., “ Optimal control problem arising in mathematical modeling of cerebral vascular pathology embolization,” *Scientific Reports.*, 12, No. 1, p. 1-15 (2022).

ЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА 2-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

LORENTZIAN PROBLEM ON 2-DIMENSIONAL DE SITTER SPACE

Петухов В.С., Сачков Ю.Л.

Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский, 152020, Россия

vladimir@sycore.org, yusachkov@gmail.com

В докладе будет рассмотрена лоренцева задача оптимального управления на двумерном пространстве де Ситтера. Будут исчерпывающе исследованы нормальные и анормальные оптимальные траектории (лоренцевы длиннейшие) с использованием принципа максимума Понтрягина, вычислено множество достижимости, сферы и расстояние в лоренцевой метрике.

Литература

1. Сачков Ю.Л., *Введение в геометрическую теорию управления*, URSS, (2021).
2. Beem, J.K., Ehrlich, P.E., Easley, K.L.: *Global Lorentzian Geometry.* Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc. (1996)
3. J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, AMS, 2011.
4. L.S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York/London . John Wiley & Sons, 1962.
5. A.A. Agrachev, Yu.L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Berlin Heidelberg New York Tokyo. Springer-Verlag. 2004

СУБЛОРЕНЦЕВЫ ЭКСТРЕМАЛИ

SUB-LORENTZIAN EXTREMALS

Подобряев А.В.

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, 152021, Россия

alex@alex.botik.ru

В докладе рассматриваются экстремальные траектории левоинвариантных обобщенных (суб)лоренцевых задач, которые характеризуются несимметричным относительно нуля множеством управлений и вогнутой подынтегральной функцией функционала качества.

Рассмотрим следующую левоинвариантную (суб)лоренцеву задачу оптимального управления на вещественной конечномерной группе Ли G. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ — замкнутый выпуклый острый конус в соответствующей алгебре Ли, а α — непрерывная на этом конусе антинорма [1]. Требуется найти липшицеву кривую $g : [0, t_1] \to G$, соединяющую единичный элемент id группы G с наперед заданным элементом $g_1 \in G$, и измеримое управление

$u \in L^\infty([0,t_1], \mathcal{C} \setminus 0)$ со значениями в множестве $\mathcal{C} \setminus 0$ такие, что

$$g(0) = \mathrm{id}, \quad g(t_1) = g_1, \quad \dot g(t) = L_{g(t)*}u(t), \quad \int\limits_0^{t_1} \alpha(u(t))\,dt \to \max,$$

где терминальное время t_1 свободно, а через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Эта постановка обобщает (суб)финслерову постановку задачи на случай вогнутой подынтегральной функции функционала качества и управления, лежащего в конусе. Если $\alpha(u) = \sqrt{u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_n^2}$, а $\mathcal{C} = \{u \in \mathfrak{g} \,|\, u_0^2 \geqslant u_1^2 + \dots + u_n^2,\, u_0 \geqslant 0\}$, то эта обычная лоренцева структура [2].

Касательный вектор к группе G называется времениподобным или светоподобным, если он лежит в левом сдвиге относительной внутренности конуса $\mathcal{C}$ или в левом сдвиге относительной границы конуса $\mathcal{C}$, соответственно. Будет говорить, что допустимая траектория сохраняет свой каузальный тип, если все ее касательные векторы либо времениподобны, либо светоподобны.

Рассмотрим двойственный конус $\mathcal{C}^\vee = \{p \in \mathfrak{g}^* \,|\, p|_{\mathcal{C}} \leqslant 0\}$ и двойственную функцию $\alpha^\vee : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ такую, что для $p \in \mathfrak{g}^*$

$$\alpha^\vee(p) = -\sup_{\alpha(v)=1} p(v).$$

Теорема. (1) *Если двойственная функция $\alpha^\vee$ является антинормой, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}^\vee$, то всякая нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип.*

(2) *Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых анормальных траекторий, которые определяются распределением подпространств $L_{g*}\mathrm{span}\,\mathcal{C} \subset T_gG$. В частности, светоподобные дуги нестрого анормальны.*

Следствие 1. *В лоренцевом случае, т.е. при $\mathrm{span}\,\mathcal{C} = \mathfrak{g}$, анормальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого анормальны.*

Тем самым анормальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет анормальных траекторий.

Следствие 2. *Если распределение плоскостей $L_{g*}\mathrm{span}\,\mathcal{C}$ контактно, то все анормальные траектории светоподобны и, в частности, нестрого анормальны.*

Следствие 3. *Пусть антинорма α задается квадратичной формой q сигнатуры $(1,r)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$,* *где в некотором базисе* $e_0, e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеем* $q(u) = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_r^2$. *Тогда нормальные экстремальные траектории задачи геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом*

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \dots - u_r^2(t) \right) \, dt \to \max,$$

где терминальное время t_1 *фиксировано, а* $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g} \setminus 0)$.

Исследование выполнено в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140 (https://rscf.ru/en/project/22-11-00140/).

Литература

1. Protasov V.Yu., “Antinorms on cones: duality and applications,” *Linear and Multilinear Algebra*, 1–27 (2021).
2. Бим Дж., Эрлих П., *Глобальная лоренцева геометрия*, М.: Мир, (1985).

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

ON THE FEATURES OF THE TIME-OPTIMAL BOUNDARY CONTROL PROBLEM SOLUTION FOR THE SYSTEMS, DESCRIBED BY THE DIFFUSION-WAVE EQUATION

Постнов С.С.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Профсоюзная ул., д. 65, Москва, 117997, Россия

postnov.sergey@inbox.ru

Рассматриваются системы, состояние которых описывается диффузионно-волновым уравнением:

$$ {}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \right] - q(x) Q(x,t), \alpha \in (0,2), \quad (1)$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $t \geqslant 0, \quad x \in [0, L]$, $(x,t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто.

Начальные условия для уравнения (1) поставим в виде:

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], k = 0, \ldots, [\alpha]. \tag{2}$$

Граничные условия для уравнения (1) ставятся в виде:

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t) \right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t \geqslant 0, i = 1, 2, \tag{3}$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$; $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0, T]$, $p > 1$ и могут быть объединены в вектор $U(t) = \big(u^1(t), u^2(t)\big)$.

Считается, что управление обеспечивает достижение системой заданного (желаемого) состояния $Q^*(x)$ в заданный момент времени $T > 0$:

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0, L]. \tag{4}$$

Рассматривается задача оптимального управления в форме задачи быстродействия [1]: найти управления $u_{1,2}(t)$ такие, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) достигнет при $t = T$ состояния (4) и при этом время перехода в это состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений $\|U(t)\| \leqslant l$ ($l > 0$ — заданное число).

Как было показано ранее, поставленная выше задача оптимального управления может быть исследована на основе решения некоторой обобщённой проблемы моментов [2, 3]. В случае, когда рассматривается приближённое решение исходного уравнения (1) соответствующая проблема моментов является конечномерной и, при определённых условиях, имеет точное решение. На основе этого решения строится решение поставленной задачи быстродействия. В настоящей работе рассмотрены случаи, когда решение задачи быстродействия может не существовать, в то время как решение соответствующей проблемы моментов существует [4]. Существование подобных случаев составляет качественное отличие решений задачи быстродействия для уравнений дробного порядка от её решений для аналогичных уравнений целого порядка (диффузии и колебаний).

Литература

1. Бутковский А.Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, 1965.
2. Kubyshkin V.A.„ Postnov S.S., "The Optimal Control Problem for Linear Systems of Non-integer Order with Lumped and Distributed Parameters," *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, 4, No. 4, 429–443 (2015).
3. Кубышкин В.А., Постнов С.С., "Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка," *Автоматика и телемеханика*, 5, 137–152 (2018).
4. Постнов С.С., "О поиске оптимального по быстродействию граничного управления с помощью метода моментов для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением," *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 225, 108—114 (2023).

УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

CONTROL IN STURM–LIOUVILLE'S PROBLEM WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

Потапов Д.К.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

d.potapov@spbu.ru

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. На отрезке $[a,b]$ рассматривается задача Штурма–Лиувилля с управлением следующего вида:

$$Lu(x) \equiv -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda g(x,u(x)) + Bv(x),\ x \in (a,b), \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Здесь $p \in C_{1,\alpha}([a,b])$, $q \in C_{0,\alpha}([a,b])$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$; λ – положительный параметр; функция $g : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, для почти всех $x \in (a,b)$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$, $g_-(x,u) = \varliminf_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup_{\eta\to u} g(x,\eta)$ и $|g(x,u)| \leqslant \beta(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $\beta \in L_q((a,b))$, $q > 1$; оператор $B : U \to L_q((a,b))$ линейный и ограниченный, U – банахово пространство управлений, функция $v(x)$ в уравнении (1) играет роль управления, управление $v \in U_{ad} \subset U$, U_{ad} – множество всех допустимых управлений для системы (1), (2).

Обобщенным решением задачи (1), (2) при фиксированном управлении v называется функция $u \in W_q^2((a,b)) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_q^1((a,b))$, удовлетворяющая для почти всех $x \in (a,b)$ включению

$$Lu(x) - Bv(x) \in \lambda[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))].$$

Для $v \in U_{ad}$ обозначим через Vv множество обобщенных решений задачи (1), (2).

Рассмотрим пространство $X = H_\circ^1((a,b))$ и функционалы

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b p(x)(u'(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b q(x)u^2(x)dx,$$

$$J_2(u) = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds.$$

На множестве D всех допустимых пар “управление – состояние” для системы (1), (2) определена функция стоимости

$$J(v,u) = ||u - u_0||_Z^l + \delta||v||_U^\mu, \tag{3}$$

где Z – функциональное банахово пространство, в которое пространство X непрерывно вложено; $u_0 \in Z$; l, δ, μ – положительные постоянные; $||\cdot||_Y$ – норма в пространстве Y. Ставится задача о нахождении пары $(w,z) \in D$ такой, что

$$J(w,z) = \inf_D J(v,u). \tag{4}$$

Имеют место следующие теоремы (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *найдется $\gamma > 0$ такое, что $J_1(u) \geqslant \gamma||u||^2$ для любого $u \in X$;*

2) *для почти всех $x \in (a,b)$ справедливы соотношения $g(x,0) = 0$ и $|g(x,u)| \leqslant \beta(x)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $\beta \in L_q((a,b))$, $q > 1$;*

3) *существует $u_0 \in X$, для которого $J_2(u_0) > 0$;*

4) *оператор $B : U \to L_q((a,b))$ линейный и ограниченный, пространство управлений U банахово, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ непусто.*

Тогда для любого $v \in U_{ad}$ существует обобщенное решение задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, дополнительно, пространство управлений U рефлексивное, множество допустимых управлений $U_{ad} \subset U$ слабо замкнуто, пространство X непрерывно вкладывается в пространство Z из* (3). *Тогда для любого $v \in U_{ad}$ существует обобщенное решение задачи* (1), (2); *множество D всех допустимых пар "управление – состояние" для системы* (1), (2) *непусто и слабо замкнуто*; *задача оптимального управления* (4) *имеет решение.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и, дополнительно, последовательность $\{v_n\} \subset U_{ad}$ слабо сходится к v в U. Тогда, если $u_n \in Vv_n$, то из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в X_1, где X_1 – некоторое вещественное банахово пространство, в которое пространство X компактно вложено. Если Vv состоит из единственной функции u, то $u_n \to u$ в X_1.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

Литература

1. Басков О.В., Потапов Д.К., "Управление и возмущение в задаче Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью", *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ.*, 19, No. 2, 275–282 (2023).

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON SOME CLASSES OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Родина Л.И.

НИТУ «МИСиС», Ленинский проспект, 4, Москва, 119049, Российская Федерация

LRodina67@mail.ru

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i, j = 1, \dots, n)$ непрерывны. Выделены три класса автономных систем и описаны свойства, которыми обладают решения систем каждого класса.

Будем считать, что система относится к первому классу на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если правые части этой системы не зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$, то есть данная система имеет вид вид $\dot{x} = C$.

Ко второму классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ либо $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.»

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D. Решения системы (1) второго класса обладают следующим свойством монотонности относительно начальных условий.

Теорема 1 (см. [1]). *Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно* (1) *и система* (1) *относится ко второму классу на множестве D. Тогда, если $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) \leqslant y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geqslant 0$.*

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать, как неравенства $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, n$. Аналогично, $x < y$ означает, что $x_i < y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Очевидно, что свойство монотонности также выполнено для систем первого класса. Кроме того, данное свойство имеет место для любого дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}$.

К третьему классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0$ либо $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.» Показано, что системы третьего класса могут не быть монотонными относительно начальных условий, но для них справедливо следующее свойство.

Теорема 2. *Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы* (1) *и данная система относится к третьему классу на множестве D. Тогда, если $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, такой, что $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.*

Получены условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \tag{2}$$

Теорема 3. *Пусть для системы* (2) *в области* D *выполнено хотя бы одно из условий:*

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} \equiv 0.$$

Тогда в области D *система* (2) *не имеет периодических решений.*

Таким образом, системы двух дифференциальных уравнений всех трех указанных классов не могут иметь периодических решений.

Отметим, что свойство монотонности, сформулированное в теореме 1, важно для решения различных прикладных задач, среди которых задачи оценки характеристик добычи возобновляемого ресурса, см. [1,2].

Литература

1. Родина Л.И., Волдеаб М.С. “О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий,” *Дифференциальные уравнения*, 59, No. 8, 1022–1028 (2023).
2. Родина Л.И., Черникова А.В. “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени,” *Труды ИММ УрО РАН*, 29, No. 1, 167–179 (2023).

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

ON OPTIMAL EXPLOITATION OF RENEWABLE RESOURCE FROM THE STRUCTURED POPULATION

Родина Л.И.

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский пр-кт, 4, стр. 1, Москва, 119049, Россия

LRodina67@mail.ru

Черникова А.В.

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых, ул. Горького, 87, Владимир, 600000, Россия

nastik.e@bk.ru

Работа является продолжением публикаций [1, 2], в которых начато исследование различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Рассмотрим модель популяции, состоящей из нескольких видов, численности которых в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$. Предполагаем, что динамика $x(k) = \big(x_1(k), \dots, x_n(k)\big)$ при отсутствии промысла задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(x(k)\big), \;\; k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$, $f_i(x), \dots, f_n(x)$ — вещественные непрерывные функции на $\mathbb{R}^n_+ \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0\big\}$.

Пусть в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$, тогда имеем модель эксплуатируемой популяции, заданную дискретной динамической системой

$$X(k+1) = F\big((1 - u(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{1}$$

Здесь $(1 - u(k))X(k) = \big((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k)\big)$, $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$, $X(1) = F(x(0))$.

Пусть $\overline{u} \in U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(1), \dots, u(k), \dots\big)\big\}$. Исследуем *среднюю временную выгоду* от добычи ресурса, которая определена функцией

$$H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) u_i(j)\,,$$

где $C_i \geqslant 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i-го вида. Если существует указанный предел, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$.

Исследуем стационарный режим эксплуатации, при котором управления $u(k) \equiv u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ постоянны в каждый момент времени $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим функцию $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i\big)$ и множество $G \doteq \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i \leqslant f_i(x) \neq 0\}$. Обозначим через $A(x)$ множество притяжения точки $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Теорема. *Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* \in G$. Тогда для любого*

$x(0) \in A\big(F(x^*)\big)$ *функция* $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает максимального значения* $D(x^*)$ *при стационарном управлении* $\overline{u}^*(k) \equiv u^*$, *где* $u_i^* = 1 - \dfrac{x_i^*}{f_i(x^*)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Пример. Найдем оптимальные стационарные режимы промысла популяции, динамика которой задана системой (1), где

$$F(x_1, x_2) = \left(3x_1(1 - x_1) + \frac{x_2}{4}, 4x_2(1 - x_2)\right),$$

$x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in [0, 1]$ — численность особей первого и второго вида соответственно. Например, при $C_1 = 16$, $C_2 = 1$ функция

$$D(x) = 16\left(2x_1 - 3x_1^2 + \frac{x_2}{4}\right) + 3x_2 - 4x_2^2$$

достигает наибольшего значения 25/3 на множестве G при $x^* = (1/3, 3/4)$, $u_1 = 35/41$, $u_2 = 0$. Таким образом, стационарным оптимальным режимом эксплуатации является эксплуатация только первого вида. Если $C_1 = C_2$, то можно показать, что оптимальной является эксплуатация двух видов.

Литература

1. Егорова А.В., Родина Л.И., “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции,” *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 29, No. 4, 501–517 (2019).
2. Родина Л.И., Черникова А.В., “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени,” *Тр. ИММ УрО РАН*, 29, No. 1, 167–179 (2023).

К ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ON A GUARANTEED CONTROL PROBLEM UNDER UNCERTAINTY FOR A STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Розенберг В.Л.

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, ул. С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108, Россия; Уральский федеральный университет (УрФУ), ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002, Россия

rozen@imm.uran.ru

Метод программных пакетов является одним из подходов к исследованию задач гарантирующего позиционного управления в условиях неполной информации о наблюдаемых состояниях динамической системы. Он включает в себя как инструмент проверки разрешимости задач, так и конструктивный алгоритм построения искомых воздействий [1, 2]. Метод детально разработан для задач о гарантированном позиционном наведении (независимо от неизвестного начального состояния из заданного конечного множества) линейной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на выпуклое целевое множество в терминальный момент времени (P1) или в момент из заданного набора (P2).

С позиций данного подхода аналогичные задачи рассматриваются в докладе для линейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Постановка предполагает формирование управляющей детерминированной программы, которая обеспечивает (независимо от набора неизвестных характеристик в начальный момент времени) наличие предписанных свойств решения, являющегося случайным процессом, в терминальный момент времени (P1) или к этому моменту (P2) при наблюдении линейного сигнала о некотором количестве реализаций.

С помощью уравнений метода моментов [3] задача для СДУ переформулируется в виде вспомогательных задач для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Обсуждаются условия совместной разрешимости новых задач, возможность построения программно-ориентированных алгоритмов решения, основанных на процедурах конечномерной оптимизации, и введенный, в силу специфики объекта и наблюдений, вероятностный критерий качества результата. Доказывается утверждение, в котором устанавливаются конструктивно проверяемые условия, обеспечивающие сколь угодно точное наведение рассматриваемых моментов случайного процесса на целевые множества при достаточно большом количестве доступных измерению траекторий исходного СДУ. Приводится модельный пример, иллюстрирующий разработанные процедуры. Работа фактически продолжает исследования [4].

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Литература

1. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S., "On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 277, 144–159 (2012).
2. Kryazhimskii A.V., Strelkovskii N.V., "An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 291, Suppl. 1, S103–S120 (2015).
3. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б., *Оптимальное управление при случайных возмущениях*, М.: Наука (1978).
4. Rozenberg, V.L., "A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation," *Ural Math. J.*, 1, No. 1, 68–82 (2015).

СВОБОДНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ СУБРИМАНОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

FREE NILPOTENT SUB-RIEMANNIAN STRUCTURES AND THEIR APPLICATIONS

Сачков Ю.Л.

Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский, 152020, Россия

yusachkov@gmail.com

Нильпотентные субримановы (СР) структуры на группах Карно доставляют фундаментальную локальную аппроксимацию субримановых структур общего положения (теорема Громова–Митчелла). Из этих СР структур наиболее интересны структуры на свободных группах Карно, так как остальные нильпотентные СР структуры получаются из свободных факторизацией группы Ли. Свободные нильпотентные СР структуры параметризуются двумерной целочисленной решеткой с параметрами (r, s), где r есть ранг (количество линейно независимых векторных полей в ортонормированном базисе), а s есть глубина (порядок скобок Ли, необходимых для порождения касательного пространства из базиса). В докладе будут рассмотрены полностью или частично исследованные на сегодняшний день случаи $r = 2$, $s = 1$–5. Будут затронуты также приложения этих СР структур к управлению колесными роботами с прицепами, а также сферическими роботами.

Литература

1. Gromov M., Carnot–Carathéodory spaces seen from within. In: *Sub-Riemannian geometry*, volume 144 of Progress in Mathematics, pp. 79–323. Birkhäuser, Basel, 1996.
2. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л., *Геометрическая теория управления*, Физматлит, (2005).
3. Сачков Ю.Л., *Введение в геометрическую теорию управления*, URSS, (2021).
4. Сачков Ю.Л., “Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях,” *УМН*, 1, No. 463, 109–176 (2022).
5. Сачков Ю.Л., “Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, интегрируемые в эллиптических функциях,” *УМН*, 1, No. 469, 67–166 (2023).

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЁХКОМПОНЕНТНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

STUDY OF OSCILLATORY PROCESSES IN THE KINETIC MODEL OF A THREE-COMPONENT CHEMICAL REACTION

Семендяева Н.Л.

МГУ, ВМК, лаборатория математического моделирования в физике КНР, г. Шэньчжэнь, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики

natalys@cs.msu.ru, 6620180045@smbu.edu.cn

Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.

МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления

{kiselev, asn, orlov, sergey.orlov}@cs.msu.su

Поиск и исследование колебательных режимов протекания химической реакции является неотъемлемой частью анализа устойчивости промышленного химического реактора. Эта задача предполагает построение математических моделей химических реакций и проведение параметрического анализа решений, что необходимо как для уточнения детального механизма реакции, так и для разработки принципиально новых технологических решений.

В данной работе изучается математическая модель химических превращений по схеме А. Н. Ивановой [1]. Математическая модель описывается системой трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для концентраций реагирующих веществ. В её основе лежат важнейшие концепции химической кинетики — закон действующих масс и фундаментальное понятие механизма реакции. Рассматривается замкнутая реакционная система.

Динамика закрытых реакционных систем является традиционным объектом математического моделирования. В закрытой системе отсутствует массообмен с внешней средой; изменение количества вещества с течением времени происходит только за счёт химической реакции. Предполагается, что реакция протекает в реакторе постоянного объёма в условиях идеального перемешивания. В этом случае концентрация каждого реагента одинакова в любой точке реакционной системы. Кроме того, предполагается, что химическая реакция протекает при постоянной температуре, и реакционная система является термически однородной.

Анализ математической модели трёхкомпонентной реакции по схеме А.Н. Ивановой в замкнутой реакционной системе позволяет перейти к специальной двухмерной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для концентраций реагирующих веществ. Показано, что полученная математическая модель реакции может демонстрировать незатухающие колебания концентраций реагентов. В работе найдены и исследованы на устойчивость четыре точки покоя. Три точки покоя являются неустойчивыми и имеют тип СЕДЛО. Четвёртая точка покоя нелинейной системы с чисто мнимыми характеристическими корнями может иметь как характер ЦЕНТРА, так и характер ФОКУСА. Расчёты показали, что фазовые траектории системы в окрестности такой точки замкнутые.

В двухмерной системе найден аналитический вид первого интеграла, теоретическое исследование которого позволяет сделать вывод о замкнутости кривой, описываемой первым интегралом. Интересно отметить, что при определённом соотношении параметров задачи первый интеграл описывает нераспадающуюся кубику с овалом согласно классификации плоских алгебраических кривых третьего порядка, предложенной И. Ньютоном [2].

Исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

1. Вольперт А.И., Худяев А.И., *Анализ в классах разрывных функций и уравнений математической физики*, М.: Наука, (1975).
2. Корчагин А.Б., “Ньютонова и аффинная классификации нераспадающихся кубик,” *Алгебра и анализ*, 24, No. 5, 94–123 (2012).

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ В СИСТЕМЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

ON AN DISTURBANCE RESONSTRUCTING ALGORITHM IN A UNIFORM METRIC IN A FRACTIONAL ORDER SYSTEM

Сурков П.Г.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108, Россия
Институт естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, ул. Ленина, 51, Екатеринбург, 620000, Россия

spg@imm.uran.ru

Рассматривается динамическая система, описываемая системой дифференциальных уравнений с дробной производной типа Капуто:

$$[D_*^\gamma x](t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T \triangleq [\sigma, \theta], \quad \theta < +\infty, \qquad (1)$$

с начальным условием $x(\sigma) = x_\sigma$, где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестное возмущение, B — постоянная $n \times m$ матрица, f — $n \times n$-мерная матричная функция, непрерывная по t и липшицева с константой $L > 0$ по второму аргументу. Здесь дробной производной Капуто [1] порядка $\gamma \in (0,1)$ для функции $x\colon T \to \mathbb{R}^n$ называется выражение $[D_*^\gamma x](t) = \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}(x - x(\sigma))](t)$, и где дробный интеграл [2] порядка γ с началом в точке σ от произвольно функции $f \in L_1(T; \mathbb{R}^n)$ определяется формулой $[I^\gamma f](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_\sigma^t (t-s)^{\gamma-1} f(s)\, ds$, обозначение $\Gamma(\gamma)$ используется для Гамма-функции Эйлера.

Траектория системы (1) заранее неизвестна, как и возмущение $u(\cdot)$, но во время функционирования системы мы можем измерять ее координаты с некоторой погрешностью $h \in (0,1)$. Рассматриваются два случая измерений фазовых координат: непрерывный и дискретный. В непрерывном случае в результате измерений определяются вектора $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющие выражению

$$\|\xi^h(t) - x(t)\|_n \leqslant h, \quad t \in T. \qquad (2)$$

В дискретном случае в моменты времени $\tau_i \in \Delta \triangleq \{\tau_j\}_{j=0}^{\kappa}$ измеряются приближенно $x(\tau_i)$, тогда находятся вектора $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$\|\xi_i^h - x(\tau_i)\|_n \leqslant h. \tag{3}$$

Рассматриваемые задачи состоят в том, чтобы по измерениям (2) или (3) построить алгоритмы, работающие в режиме онлайн, которые бы получали аппроксимации неизвестного внешнего возмущения в системе (1) близкие к нему в равномерной метрике.

Мы будем следовать походу динамического обращения [3], который использовался при решении аналогичной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в [4]. Наложим на систему (1) условия. Пусть матрица B — невырожденная и $u(\cdot) \in W_\infty^\gamma(T;\mathbb{R}^m) \triangleq \{u(\cdot) \in C(T;\mathbb{R}^m, [D_*^\gamma u](\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^m\}$, $u(0) = 0$.

В непрерывном случае в качестве вспомогательной системы (модели) выбираем

$$[D_*^\gamma y^h](t) = f(t, \xi^h(t)) + Bv^h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T,$$

с начальным условием $y(\sigma) = x_\sigma$ и закон управления в ней

$$v^h(t) = -(\alpha(h))^{-1} B^\top (y^h(t) - \xi^h(t)), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где $\alpha(h)$ — малый положительный параметр. В дискретном случае модель имеет вид

$$[D_*^\gamma y^h](t) = f(\tau_i, \xi_i^h) + Bv^h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{0, \kappa_h},$$

с начальным условием $y(\sigma) = x_\sigma$ и законом управления

$$v^h(t) = -(\alpha(h))^{-1} B^\top (y^h(\tau_i) - \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Тогда для параметров алгоритма в непрерывном случае, удовлетворяющих соотношениям $\alpha(h) \to 0$, $\frac{h^{\beta_2}}{\alpha^2(h)} \to 0$, $\frac{h^\lambda}{\alpha(h)} \to 0$ при $h \to 0$, где $\beta_1, \beta_2 \in (0, 2)$, $\lambda = \min\{\beta_1, 2 - \beta_1, \beta_2\}$, справедлива сходимость $v^h(\cdot) \to u(\cdot)$ в $C(T;\mathbb{R}^m)$. Аналогичное утверждение можно получить и в дискретном случае.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier Science, (2006).
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, (1987).

3. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И., *Методы динамического восстановления входов управляемых систем*, Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, (2011).
4. Максимов В.И., “Об одном алгоритме восстановления управлений в равномерной метрике,” *Прикладная математика и механика*, 77, No. 2, 292–301 (2013).

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ ПОМОЩИ СЛУЧАЙНОГО ДЕРЕВА

ON CALCULATING AN APPROXIMATE SOLUTION OF TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH STATE CONSTRAINTS USING RANDOM TREE

Точилин П.А., Паршиков М.В.

МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, 119991

tochilin@cs.msu.ru, miron232734@gmail.com

В работе рассматривается задача быстродействия для объекта, динамика которого описывается системой дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = Ax + Bu + f,$$
где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $f \in \mathbb{R}^n$, а на возможные значения управляющих параметров наложены жёсткие, поточечные эллипсоидальные ограничения: $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P)$, $p \in \mathbb{R}^m$, $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Объект требуется перевести из заданной начальной позиции $x_{start} \in \Omega$ в целевое множество $X_{goal} \subset \Omega$, избегая столкновений с заданными неподвижными препятствиями в области Ω.

Для приближённого решения обозначенной задачи предлагается алгоритм поиска субоптимальных траекторий, основанный на алгоритме быстрорастущих случайных деревьев (RRT*) [1], [2] и использующий методы эллипсоидального оценивания [3]. Результатом такого подхода является дерево $\Gamma = (V, E)$, множество вершин V которого состоит из начальной точки и точек, случайным образом генерируемых в Ω на каждой итерации работы алгоритма. Множество дуг E состоит из решений локальных задач оптимального управления о переводе системы из точки в точку. Эти подзадачи предлагается решать с помощью метода “прицеливания” на эллипсоидальную трубку, построенную из ранее найденной случайной точки и являющуюся внутренней оценкой множества разрешимости для рассматриваемой системы.

Приближённые методы, использующие случайные деревья или графы более общего вида, активно разрабатываются в последние несколько лет. Однако, большинство таких алгоритмов не могут в общем случае учесть так называемые кино-динамические ограничения, возникающие из-за наличия нетривиальных дифференциальных уравнений. Предложенный нами в данной работе метод позволяет решить эту проблему.

Разработанный метод может быть использован и в случае с нелинейной динамикой, заданной уравнением вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются достаточно гладкими. В этом случае предлагается модифицировать алгоритм и добавить в него дополнительную процедуру линеаризации системы в малой окрестности случайно сгенерированной (на каждой итерации работы алгоритма) точки. Вспомогательная подзадача о переводе траектории системы из точки в точку при этом значительно усложняется из-за необходимости учитывать погрешность линеаризации. Последняя интерпретируется как помеха (неопределённость) с заданными поточечными ограничениями. В результате необходимо уметь решать задачу построения трубки разрешимости для линейной системы с неопределённостью, либо её внутренней оценки. Это также предлагается делать при помощи известных методов эллипсоидального исчисления [4].

При некоторых дополнительных условиях алгоритм является вероятностно полным и позволяет эффективно с точки зрения вычислений искать субоптимальные траектории. При увеличении числа итераций можно получить результат, сколь угодно близкий к оптимальному.

Работа предложенных алгоритмов продемонстрирована на нескольких примерах. Произведено сравнение полученных результатов с некоторыми другими приближёнными методами, использующими случайные деревья.

Литература

1. Karaman S. , Frazzoli E. “Sampling-based algorithms for optimal motion planning”, *The international Journal of Robotics Research*, 30, No. 7, 846 – 894 (2011).
2. Webb D.J. , van der Berg J. “Kinodynamic RRT*: Asymptotically optimal motion planning for robots with linear dynamics”, *Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation*, 5054 – 5061 (2013).

3. Kurzhanski A.B., Varaiya P., *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*, Birkhäuser, (2014).
4. Kurzhanski A.B., Varaiya P., “Reachability analysis for uncertain systems – the ellipsoidal technique”, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B.*, 9, No. 3, 347 – 367 (2002).

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ КВАДРАТИЧНОМ ОГРАНИЧЕНИИ НА УПРАВЛЕНИЕ

NUMERICAL STUDY OF A TWO-DIMENSIONAL REACHABLE SET OF DUBINS CAR WITH INTEGRAL QUADRATIC CONSTRAINT ON CONTROL

Трубников Г.И.

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
ул. Куйбышева 48, Екатеринбург, 620026, Россия

jora_it@mail.ru

В работе [1] намечена схема построения множества достижимости машины Дубинса при интегральном ограничении на управление. Построение во многом проводится аналогично тому, что сделано при геометрических ограничениях [2]. В данной работе анализируется двумерное множество достижимости машины Дубинса в геометрических координатах и даётся сравнение с тем, что известно для случая ограничений на мгновенные значения управляющего воздействия [3].

Движение машины Дубинса описывается соотношениями

$$\dot{x} = \cos\varphi, \ \ \dot{y} = \sin\varphi, \ \ \dot{\varphi} = u.$$

Здесь x, y — геометрические координаты на плоскости; u — скалярное управление. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Полагаем $t_0 = 0$, $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$. Интегральное ограничение имеет вид

$$\int_0^{t_f} u^2(t)dt \leqslant \mu\,, \qquad \mu > 0.$$

Множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ в момент t_f есть совокупность всех геометрических состояний $(x(t_f), y(t_f))^{\mathsf{T}}$, в каждое из которых можно перейти в момент t_f при помощи кусочно-непрерывного управления $t \to u(t)$, удовлетворяющего интегральному ограничению.

В случае геометрического ограничения $|u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0, t_f]$, граница двумерного множества достижимости порождается кусочно-постоянными управлениями с не более чем одним моментом переключения. Она состоит из двух эвольвент и двух кардиоид [3]. При увеличении t_f от 0 до некоторого $t_f^{(1)}$ множество достижимости является односвязным. Затем на некотором коротком промежутке $[t_f^{(1)}, t_f^{(2)})$ оно становится неодносвязным (появляется "дырка", не принадлежащая множеству достижимости). При $t_f \geqslant t_f^{(2)}$ односвязность снова восстанавливается и граница определяется только двумя эвольвентами.

Установлено, что при интегральном ограничении граница также составляется из четырёх аналогичных кривых. Любое не равное тождественно нулю управление, ведущее на границу, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с краевым условием из работы [4], является непрерывным и имеет не более одного момента смены знака. Аналогом эвольвенты служит кривая, порождаемая управлениями, постоянными по знаку на промежутке $[0, t_f]$. В качестве аналога кардиоиды выступает кривая, точки которой формируются управлениями с одним моментом смены знака. Характер изменения множества достижимости во времени также аналогичен: лишь на некотором полуинтервале $[t_f^{(1)}(\mu), t_f^{(2)}(\mu))$ отсутствует односвязность; начиная с момента $t_f^{(2)}(\mu)$, при построении границы множества используются только знакопостоянные управления.

Поясним принципиальное отличие построения границы множества достижимости при геометрическом и интегральном ограничениях. Если t_f не слишком велико, то при построении границы перебираем значения φ от 0 до некоторого $\varphi_{\max}$ (при котором φ-сечение трёхмерного множества достижимости вырождается в точку) и симметрично от 0 до $-\varphi_{\max}$. При геометрическом ограничении каждому $\varphi \in [0, \varphi_{\max})$ соответствуют две точки на границе φ-сечения трёхмерного множества. Одна попадает на эвольвенту, другая — на кардиоиду. При интегральном ограничении такое свойство регулярности есть только до некоторого значения $\varphi^\diamond < \varphi_{\max}$. Далее от $\varphi^\diamond$ до некоторого критического значения $\varphi^\# < \varphi_{\max}$ обе снимаемые точки относятся к кривой, формируемой управлениями без смены знака. Их нахождение имеет значительные вычислительные трудности. При $\varphi \in (\varphi^\#, \varphi_{\max})$ граница

φ-сечения не зацепляется с границей множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu)$.

Литература

1. Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А., “Трёхмерное множество достижимости машины Дубинса при интегральных ограничениях,” *Сборник тезисов докладов XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике*, 1, 193−196 (2023).
2. Patsko V.S., Fedotov A.A., “Three-dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description,” *Commun. Optim. Theory*, 2022, Article ID 23, 1−42 (2022).
3. Cockayne E.J., Hall G.W.C., “Plane motion of a particle subject to curvature constraints,” *SIAM J. Control Optim*, 13, No. 1, 197−220 (1975).
4. Зыков И.В., “О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями,” *CEUR Workshop Proceedings*, 1894, 88−97 (2017).

ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА, РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

EXPLOITATION OF RENEWABLE RESOURCE DISTRIBUTED ON THE SURFACE OF THE EARTH

Туницкий Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, ул. Профсоюзная д.65, г. Москва, 117997, Россия

dtunitsky@yahoo.com

Доклад посвящен оптимальному управлению смешанным сбором – перманентным (стационарным) и периодическим импульсным – распределенного на поверхности Земли ресурса. Примерами такого ресурса могут служить биологические популяции, в частности, вирусы, а также химические примеси, пылевые частицы и т.п.

Будем считать поверхность Земли гомеоморфной сфере. Тогда в качестве ее математической модели можно использовать двумерную сферу единичного радиуса, стандартно вложенную в трехмерное евклидово пространство. Соответственно, для математического моделирования эксплуатации распределенного на поверхности Земли ресурса при естественных допущениях можно использовать полулинейное параболическое уравнение второго порядка на двумерной сфере, в котором независимые переменные

– время и точки сферы, а неизвестная функция – плотность распределения рассматриваемого ресурса в данное время в данной точке сферы.

Левая часть рассматриваемого уравнения представляет собой сумму первой производной по времени и линейного эллиптического дифференциального оператора второго порядка по сфере от неизвестной функции. Эта часть характеризует диффузию и перенос рассматриваемого ресурса. Правая часть квадратична относительно неизвестной функции и характеризует темпы обновления и насыщения ресурсом окружающей среды. В эту часть также входит слагаемое, линейно зависящее от функции управления интенсивностью перманентного сбора/восстановления ресурса.

Дополнительно для плотности распределения ресурса задаются начальное значение и условия, которые характеризуют интенсивность импульсного сбора/восстановления ресурса, периодически осуществляемого через равные промежутки времени.

По сути, рассматриваемая модель соединяет в себе и обобщает две классические модели: логистическую модель Ферхюльста [1] и модель распространения тепла Фурье [2]. Ее можно считать неоднородным управляемым аналогом на сфере известной модели А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского, Н.С. Пискунова [3] и Р.А. Фишера [4].

При такой математической модели разумным критерием качества эксплуатации ресурса может служить средняя временная прибыль, полученная от его смешанного – перманентного и импульсного – сбора/восстановления, а целью – максимизация этой прибыли, см. [5] и [6]. Оказывается, что на бесконечном горизонте планирования при естественных ограничениях на входные данные и допустимые управления существует оптимальная стратегия эксплуатации распределенного на поверхности Земли ресурса, обеспечивающая максимум средней временной прибыли от его смешанного сбора/восстановления.

Автор выражает благодарность А.А. Давыдову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

Литература

1. Verhulst P.F., "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement *Correspondance mathematique et physique*, 10, 113-–121 (1838).
2. Fourier J.B.J., *Theorie Analytique de la Chaleur*, Paris: F. Didot, (1822).

3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С., "Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме с *Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика.*, 1, no. 6, 1–26 (1937).
4. Fisher R.A., "The advance of advantageous genes *Ann. Eugenics*, 7, 335–369 (1937).
5. Арнольд В.И., "Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах *Функц. анализ и его прил.*, 36, No. 2, 1–11 (2002).
6. Davydov A., Vinnikov E. "Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 407, 101–112 (2023).

ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

EXTENSIBILITY OF SOLUTIONS TO NON-AUTONOMOUS SYSTEMS OF QUADRATIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Хайлов Е.Н.

МГУ имени М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, Москва, 119991, Россия

khailov@cs.msu.su

В докладе рассматриваются задачи минимизации со свободным правым концом на заданном отрезке времени для управляемых аффинных систем дифференциальных уравнений. Для такого класса задач исследуются оценки числа различных нулей функций переключений, определяющих вид соответствующих оптимальных управлений. В основе исследования лежит анализ неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций. Подробно рассматриваются неавтономные линейные системы второго и третьего порядков. В них выполняется замена переменных, которая преобразует матрицу такой системы к специальному верхне-треугольному виду, что позволяет оценить число нулей соответствующих функций переключений. В случае линейной системы второго порядка это преобразование осуществляется с помощью функции, удовлетворяющей неавтономному уравнению Риккати, а в случае линейной системы третьего порядка – с помощью функций, удовлетворяющих неавтономной системе квадратичных дифференциальных уравнений третьего порядка. Приводится утверждение, являющееся достаточным условием существования решения как неавтономного уравнения Риккати, так и неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений, на всем заданном отрезке времени ([1]). Его доказательство опирается на теорему сравнения Чаплыгина. Применимость этого утверждения демонстрируется на примерах конкретных задач минимизации в медицине ([2, 3, 4, 5]).

Также, в докладе описывается новый подход, обосновывающий продолжимость решений неавтономной системы квадратичных дифференциальных уравнений третьего порядка на заданный отрезок времени. С одной стороны, он основан на сочетании расщепления такой системы квадратичных уравнений на подсистемы меньшей размерности и применения условия квазиположительности ([6]) к этим подсистемам. С другой стороны, для оценки решений таких подсистем на максимально возможных полуинтервалах существования этих решений используются соответствующие функций Ляпунова. Применимость такого подхода при анализе неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений для функций переключений и отвечающих им вспомогательных функций демонстрируется на примерах конкретных задач минимизации в медицине ([7, 8, 9]).

Литература

1. Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., “О продолжимости решений неавтономных квадратичных дифференциальных систем,” *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 19, No. 4, 279–288 (2013).
2. Grigorieva E.V., Khailov E.N., “Optimal vaccination, treatment, and preventive campaigns in regard to the SIR epidemic model,” *Math. Model. Nat. Pheno.*, 9, No. 4, 105–121 (2014).
3. Grigorieva E.V., Khailov E.N., “Optimal intervention strategies for a SEIR control model of Ebola epidemics,” *Mathematics*, 3, No. 4, 961–983 (2015).
4. Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A., “Optimal control for a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate,” *Math. Model. Nat. Pheno.*, 11, No. 4, 90–105 (2016).
5. Grigorieva E., Khailov E., Korobeinikov A., “Optimal control for an SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate,” *Stud. Appl. Math.*, 141, 353–398 (2018).

6. Красносельский М.А., *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*, Наука, (1966).
7. Khailov E., Grigorieva E., Klimenkova A., "Optimal CAR T-cell immunotherapy strategies for a leukemia treatment model," *Games*, 11, No. 4, 53, 1–26 (2020).
8. Grigorieva E.V., Khailov E.N., Korobeinikov A., "Optimal controls of the highly active antiretroviral therapy," *Abstr. Appl. Anal.*, 2020, article ID 8107106, 1–23 (2020).
9. Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д., "Оптимальные стратегии CAR-T терапии лечения лейкемии в модели хищник-жертва Лотки-Вольтерры," *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 27, No. 3, 43–58 (2021).

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗНАКА КАК УСЛОВИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

ON UNSTABILITY OF THE SIGN AS SOME TRANSVERSALITY CONDITION

Хлопин Д.В.

ИММ УрО РАН им. Н.Н.Красовского, С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108, Россия

khlopin@imm.uran.ru

В докладе предполагается обсудить применение условий трансверсальности на бесконечности для классических экономических приложений, таких как задачи типа Рамсея или модель устойчивого роста Белтратти-Чичилницкой-Хила.

Для этого рассмотрим следующий класс задач управления на бесконечном промежутке:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\ \int_0^\infty e^{-\varrho\tau} g_0(u(\tau))\,d\tau \\ &\text{при } \frac{dy(t)}{dt} = g(y(t)) - u(t),\ y(0) = x_* > 0 \\ &\qquad y(t) \in \mathbb{R},\ u(t) \in U,\ \mathrm{Limsup}_{\theta\uparrow\infty}\{\mathrm{sign}\, y(\theta)\} \subset 1. \end{aligned}$$

Асимптотическое терминальное условие, $\mathrm{Limsup}_{\theta\uparrow\infty}\{\mathrm{sign}\, y(\theta)\} \subset 1$, здесь означает следующее: $y(t)$ обязано быть положительным для всех достаточно больших t, что дает аналог условия No-Ponzi. Пусть также U — промежуток в $[0,\infty)$, ϱ — произвольное действительное число; функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[0,\infty)$, дважды дифференцируемы на $(0,\infty)$ и удовлетворяют

$$g(0)=0,\ g''(x)<0,\ g_0'(v)>0,\ g_0''(+0)<0 \quad \forall x\in(0;\infty), v\in U.$$

Отметим, что эти требования на g, g_0 — лишь часть условий Инады.

Пусть $\hat{u}(\cdot)$ — локально слабо обгоняющее оптимальное [1] управление для задачи выше. В частности, можно потребовать, чтобы для всякого другого допустимого в этой задаче управления $u(\cdot)$, отличающегося на промежутке $[0,T]$ от $\hat{u}(\cdot)$ лишь на подмножестве достаточно малой мары Лебега (для каждого положительного T), имело место

$$\limsup_{T\to\infty}\int_0^T e^{-\varrho\tau}\big[g_0(u(\tau))-g_0(\hat{u}(\tau))\big]\,d\tau \geqslant 0.$$

Пусть $\hat{y}(\cdot)$ — траектория, порожденная управлением $\hat{u}$. Напрямую из принципа максимума Понтрягина следует, что, если эта траектория $\hat{y}(\cdot)$ положительна, то

1. с помощью «теневой цены» $\hat{\psi}(\cdot)$, некоторого ненулевого решения $\frac{d\hat{\psi}(t)}{dt}=\hat{\psi}(t)g'(\hat{y}(t))$, оптимальное управление можно восстановить правилом:

$$\hat{u}(t)=\eta(e^{\varrho t}\hat{\psi}(t)),$$

где $\eta(q)=\arg\max_{u\in U}[g_0(u)-qu]$ для всех $q\in\mathbb{R}$;
2. пара $(\hat{y}(\cdot),\hat{p}(\cdot)=\hat{\psi}(\cdot)e^{\varrho\cdot})$ решает гамильтонову систему

$$\frac{dy(t)}{dt}=g(y(t))-\eta(p(t)),\ \frac{dp(t)}{dt}=p(t)\big(\varrho-g'\big(y(t)\big)\big);$$

3. либо $\hat{\psi}(\cdot)=\hat{p}(\cdot)=0$, либо $\hat{\psi}(\cdot)$ и $\hat{p}(\cdot)$ всегда положительны.

Оказывается, что показано в [1, Proposition 1] при помощи необходимого краевого условия на бесконечности, дополнительного к принципу максимума, в случае $\hat{\psi}(\cdot)>0$ и $\hat{p}(\cdot)>0$ также выполнено:

1. знак траектории $\hat{y}(\cdot)$ неустойчив: то есть существует сходящаяся к нему последовательность порожденных управлением $\hat{u}(\cdot)$ траекторий $y_n(\cdot)$, для которой имеет место $y_n(\theta_n)\leqslant 0$ при некоторой идущей к $+\infty$ последовательности θ_n;

2. знак траектории $\hat{y}(\cdot)$, как компоненты решения $(\hat{y}, \hat{p})(\cdot)$ вышеуказанной гамильтоновой системы, неустойчив, то есть существует сходящаяся к нему последовательность решений $(\bar{y}_n, \bar{p}_n)(\cdot)$ этой системы, для которой имеет место $\bar{y}_n(T_n) \leqslant 0$ при некоторой идущей к $+\infty$ последовательности T_n.

Найденное требование неустойчивости знака траектории позволяет исключать из возможных оптимальных решений даже допустимые седловые точки и соответствующие им управления-константы. К примеру, при выборе $g(x) = 2x - x^2$, $g_0(u) = \sqrt{u}$, $U = [0,1]$, $\varrho = -1$, соответствующая гамильтонова система будет иметь два неотрицательных положения равновесия (две седловые точки), но неустойчивым знак y будет лишь у экстремалей, сходящихся к точке $(1,0)$. Поскольку у экстремалей, попадающих в окрестность другой седловой точки, $(3/2, \sqrt{3}/3)$, знак у траектории y устойчив, то и соответствующие этим экстремалям управления не будут даже локально слабо обгоняюще управляемыми.

Литература

1. Khlopin D.V., “Necessary Conditions in Infinite-Horizon Control Problems that Need no Asymptotic Assumption,” *Set-Valued and Variational Analysis*, 31, No. 1, 8 (2023).

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

DECOMPOSITION AND DYNAMIC PROGRAMMING IN ROUTE PROBLEMS WITH CONSTRAINTS

Ченцов А.Г.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, С.Ковалевской ул., 16, Екатеринбург, 620108, Россия

chentsov@imm.uran.ru

Исследуется задача о последовательном посещении мегаполисов (непустых конечных множеств) при ограничениях в виде условий предшествования и функциях стоимости с зависимостью от списка заданий. Рассматриваются два варианта агрегирования затрат: аддитивный и минимаксный (вариант задачи на узкие места). Все множество заданий разбито в сумму двух подмножеств, что порождает две частичные задачи; задания, соответствующие первой задаче, должны быть выполнены раньше, чем начнется выполнение заданий второй частичной задачи. Возникают предваряющая и финальная подзадачи, в каждой из которых возникают свои условия предшествования. Целью исследования является построение оптимальных композиционных процессов, включающих каждый перестановку индексов заданий (маршрут), траекторию перемещения по мегаполисам, занумерованным в соответствии с упомянутой перестановкой, и точку старта из заданного конечного множества. Метод решения — широко понимаемое динамическое программирование (ДП), реализуемое раздельно в предваряющей и финальной задачах. В числе приложений — задачи управления инструментом при фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ, задачи, связанные с демонтажом радиационно опасных объектов (атомная энергетика), некоторые логистические задачи в малой авиации, связанные с организацией системы перелетов при дефиците топлива (в последнем случае целесообразно использовать минимаксный вариант постановки).

С применением ДП в работе получено оптимальное композиционное решение. На его основе построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ и позволяющий в диапазоне ощутимых и представляющих практический интерес размерностей находить оптимальный композиционный маршрутный процесс за вполне приемлемое время и в “аддитивном”, и в “минимаксном” случаях (см.[1, 2, 3]). В основе построений находится подход [4, раздел 4.9], в рамках которого процедура ДП [5] для решения задачи коммивояжера (ЗК) распространена на случай более общей задачи маршрутизации с условиями предшествования (в связи с методами решения ЗК отметим [5, 6, 7, 8, 9, 10]).

Литература

1. Ченцов А.Г., Ченцов П.А., “Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант”, *Вестник российских университетов. Математика*, 27, No. 137, 95–124 (2022).
2. Ченцов А.Г., Ченцов П.А, “Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 28, No 2, 215–248 (2022).
3. Ченцов А.Г, “Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий”, *Известия ИМИ УдГУ*, 61, 156–186 (2023).
4. Ченцов А.Г, *Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории*, М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, (2008).

5. Беллман Р., “Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере”, *Кибернетический сборник М.: Мир*, 9, 219–228 (1964).
6. Gutin G., Punnen A., *The traveling salesman problem and its variations*, Berlin: Springer, (2002).
7. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, (2012).
8. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю, *Экстремальные задачи на множествах перестановок*, Екатеринбург: УМЦ УПИ, (2016).
9. Сергеев С.И., “Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования”, *Автоматика и телемеханика*, No. 7, 144–150 (1995).
10. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К, “Алгоритм для решения задачи о коммивояжере”, *Экономика и математические методы*, 1965. 1, No. 1, 94–107 (1965).

ОДНО СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕР И ЗАДАЧА НА ПРОГРАММНЫЙ МИНИМАКС

ONE PROPERTY OF CONTINUOUS DEPENDENCE OF SETS IN THE SPACE OF MEASURES AND THE PROGRAM MINIMAX PROBLEM

Ченцов А.Г.

ИММ УрО РАН, С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, РФ

chentsov@imm.uran.ru

Серков Д.А.

ИММ УрО РАН, С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, РФ

d.a.serkov@gmail.com

Для конфликтно управляемых динамических систем, удовлетворяющих условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности изучается разрешимость задачи на минимакс/максимин в классе обобщённых управлений (известно [1], что такие системы не обладая, вообще говоря, липшицевостью по фазовой переменной, удовлетворяют теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина). Рассматриваются вопросы корректности такого расширения, то есть возможности аппроксимации обобщённых управлений в пространстве стратегических мер вложениями исходных обычных управлений.

С этой целью исследуются зависимость множества мер от общего маргинального распределения, заданного на одном из факторов базового пространства. Установлена непрерывность этой зависимости в метрике Хаусдорфа, заданной метрикой, отвечающей $*$-слабой топологии в пространстве мер (близкие утверждения см. у Дж. Бергина [2]; из последних продвижений см. В. И. Богачев и С. Н. Попова [3]). Также показана плотность в $*$-слабых топологиях вложений исходных обычных управлений и пар управление-помеха в множества соответствующих обобщённых управлений.

Базовым пространством служит декартово произведение $X \times Y$ непустых метрических компактов X, Y с борелевскими σ-алгебрами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, соответственно. На измеримом пространстве $(X, \mathcal{X})$ задаем непустое множество неотрицательных борелевских мер M компактное в относительной $*$-слабой топологии. Каждой мере μ из компакта M сопоставляется множество $\mathfrak{N}_\mu$ всех неотрицательных борелевских мер на произведении измеримых пространств $(X, \mathcal{X})$ и $(Y, \mathcal{Y})$ с общим маргинальным распределением μ, называемое *программой, отвечающей мере* μ. Пространство борелевских мер на $X \times Y$ оснащаем $*$-слабой топологией. Тогда объединение всех программ $\mathfrak{N} = \cup_{\mu \in M} \mathfrak{N}_\mu$ оказывается $*$-слабо замкнутым, сильно ограниченным и метризуемым. Фиксируем метрику ρ, порождающую указанную $*$-слабую топологию на $\mathfrak{N}$ и вводим метрику Хаусдорфа ρ_H, на его непустых замкнутых ограниченных подмножествах. Оценкой изменения программ $\mathfrak{N}_\mu$ в метрике ρ_H в зависимости от распределений $\mu \in M$ показана [4] непрерывность отображения $M \ni \mu \mapsto \mathfrak{N}_\mu \in \mathfrak{N}$, что обобщает результат [5, Лемма П.2].

Отметим, что данное свойство непрерывности в метрике ρ_H и утверждения о плотности вложений обычных управлений в обобщённые вытекают из [5, Лемма П.1]. Близкие результаты и конструкции имеются в работах H. Hopenhayn [6], J. Bergin и D. Bernhardt [7].

Из указанных свойств конструкции расширения и условий обобщенной единственности и равномерной ограниченности [1] следует разрешимость задачи на минимакс в обобщённых управлениях и аппроксимируемость этого решения в исходной задаче для широкого семейства нелинейных и, вообще говоря, нелипшицевых по фазовой переменной динамических систем.

Литература

1. Кряжимский А. В., ”К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения” *Докл. АН СССР.* Т 239. 779–782 (1978).
2. J. Bergin. On the continuity of correspondence on sets of measures with restricted marginals, Economic Theory, v.13, pp.471–481 (1999).
3. В. И. Богачев, С. Н. Попова, Расстояния Хаусдорфа между каплингами и оптимальная транспортировка с параметром, Mat. Sb., Т. 215, № 1, 33–58. (2024)
4. Серков, Д. А., Ченцов, А. Г. ”Об одном свойстве непрерывной зависимости множеств в пространстве мер”, *Nonlinear Analysis and Extremal Problems: 7-я Intern. conf., Irkutsk, Russia, July 15–22, 2022 : труды.* 106–107. (2022)
5. Ченцов А.Г., ”Об одной игровой задаче управления на минимакс” *Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика*, No. 1. 39–46 (1975).
6. H. Hopenhayn, ”Entry, exit, and firm dynamics in long run equilibrium”, Econometrica 60, pp.1127–1150, (1992).
7. J. Bergin, D. Bernhardt, ”Anonymous sequential games: Existence and characterization of equilibria” Economic Theory 5, 461-489, (1995).

ЗАМЕТКИ О ТЕОРИИ ИГР

GAME THEORY NOTES

Чистяков С.В.

Вестник Санкт-Петербургского университета (10-я серия), Университетский пр. 35, Санкт-Петербург, Петергоф, 198504, Россия

svch50@mail.ru

Васецов М.Е.

ООО “ЛАНИТ-ТЕРКОМ”, Чичеринская ул. 2, Санкт-Петербург, Петергоф, 198504, Россия

matvey_v@yahoo.com

В качестве теоретико-игровых моделей социально-экономических задач чаще используются бескоалиционные и кооперативные игры. Основным недостатком бескоалиционной теории игр, в основу которой положен принцип равновесия в смысле Нэша, является то, что ситуация равновесия в смысле Нэша может быть не единственной. В связи с этим возникает проблема сужения множества ситуаций равновесия в смысле Нэша, или, что фактически равносильно, проблема сужения множества векторов выигрышей игроков в таких ситуациях. Решение этой проблемы можно искать в рамках классической кооперативной игры, в которой характеристическая функция строится по множеству векторов выигрышей игроков в ситуациях равновесия по Нэшу. При некоторой естественной трансформации такой подход оказывается применим и к дифференциальным играм, при этом конструируемое кооперативное решение Нэша оказывается динамически устойчивым.

При моделировании социально–экономических задач принятия решения в условиях неопределенности используются также и антагонистические игры. В тех случаях, когда оптимальные стратегии у игроков отсутствуют, иногда оказывается, что при любом $\varepsilon > 0$ у них существуют так называемые ε-оптимльные стратегии, пара которых (по одной ε-оптимальной стратегии от каждого игрока) образует ситуацию ε-равновесия. В таком случае, т.е. в случае существования при любом $\varepsilon > 0$ ситуаций ε-равновесия, оказывается возможным расширить понятие значения антагонистической игры, определяемого первоначально, как значение функции выигрыша в ситуации равновесия.

К сожалению, на протяжении многих лет в учебной литературе формулировка и доказательство теоремы, призванной обосновывать это положение были далеки от совершенства. В докладе приводится эта теорема и надлежащим образом исправленный ее вариант.

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ЛОКАЛЬНО-ИНЕРЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

EVASION PROBLEM IN QUASILINEAR DIFFERENTIAL GAMES WITH LOCALLY INERTIAL CONTROLS

Югай Л.П.

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, ул. Спортсменов, 19, г. Чирчик, Узбекистан

yugailp@mail.ru

Рассматривается квазилинейная конфликтно управляемая динамическая система

$$\dot{z} = Cz + f(u, v) + a, \qquad (1)$$

в которой две противоборствующие стороны(игроки) выбирают, соответственно, управляющие параметры $u \in P \subset R^p$ и

$v \in Q \subset R^q$, P и Q — непустые компакты. Далее, $z \in R^n$, C — $(n \times n)$ постоянная матрица, $a \in R^n$ — заданный вектор, $f(u, v)$ — непрерывная функция. Терминальное множество M является подпространством R^n.

Для (1) рассматривается дифференциальная игра убегания в постановке [1]. Игроки выбирают управления из классов локально-инерционных управлений (ЛИУ), определяемых следующим образом [ср. 2–7].

$L_P(t_0, \Delta_1)$ — это класс измеримых функций преследователя

$u = u(t) \in P, t \geqslant t_0$, таких, что на каждом отрезке $[t_0, t_0 + \Delta_1]$ и его разбиении $T_1 = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t_0 + \Delta_1\}$ выполняются условия:

а) $u(t_i) = u_i \in P$;

б) $|u(t) - u(t_i)| \leqslant \gamma_1 |t - t_i|^{\alpha_1}$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, где $\gamma_1 \geqslant 0$, $\alpha_1 > 0$, $\Delta_1 > 0$, где $i = 1, 2, \ldots, p$, $p \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

$L_Q(t_0, \Delta_2)$ — это класс управлений убегающего игрока, содержащий все измеримые функции $v = v(t) \in Q$, для которых:

а) $v(t_i) = v_i \in Q$;

б) $|v(t) - v(t_i)| \leqslant \gamma_2 |t - t_i|^{\alpha_2}$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, где $\gamma_2 \geqslant 0$, $\alpha_2 > 0$, $\Delta_2 > 0$, где $i = 1, 2, \ldots, q$, $q \in N$, $T_2 = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_q = t_0 + \Delta_2\}$.

В игре (1) предполагается, что в убегающему игроку в процессе уклонения в каждый момент времени известно значение управления преследователя в тот же момент. Далее, обоим игрокам известны исходные параметры игры (P, Q, M, а также константы $\alpha_i, \gamma_i, \Delta_i, i = 1, 2.$).

В начальный момент $t_0 \geqslant 0$ преследователь выбирает свое управление $u = u(t_0) \in P$, и это значение становится известным убегающему игроку. В последующие моменты времени управление преследователя выбирается из класса $L_P(t_0, \Delta_1)$, при этом разбиение преследователь производит по своему усмотрению. Заметим, что в моменты t_i управление преследователя может «скакнуть» и принять любое значение $u(t_i) = u_i \in P$. Уклоняющийся игрок, зная управление преследователя в текущий момент и его принадлежность $L_p(t_0, \Delta_1)$, строит свое управление $L_Q(t_0, \Delta_2)$, обеспечивающее уклонение от M при всех $t \geqslant t_0$.

Предположение 1. Существуют натуральные числа k и двумерное подпространство $W \subset L$, такие, что для каждого $u \in P$ множество $R(u) = \pi C^{k-1} f(u, Q)$ содержит внутреннюю точку относительно W (здесь π — ортопроектор из R^n на W), а множества $[\pi C^i f(P, Q)]_j = 0$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, k-2$, $j = 1, 2$ — номер координаты.

Теорема 1. При выполнении Предположения 1 разрешима задача убегания (1) из любой начальной точки $z_0 \notin M$ в классах локально-инерционных управлений.

Замечание. Задача убегания (1) в классах ЛИУ рассмотрена также при выполнении более "тонких" достаточных условий [3,4].

Литература

1. Избранные труды Л.С.Понтрягина. - М.:МАКС Пресс.2004.-552 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. –М.: Наука. 1974. 456с.
3. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. Тр. МИАН СССР им.В.А, Стеклова. –1997, Т. 113, с. 105–128.
4. Сатимов Н., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления.–Ташкент: Фан.2000.– 176с.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука. 1977. –392с.
6. Кряжимский А.В. Игровая задача уклонения для кусочно-непрерывной системы. // Управление и оценивание в динамических системах: Сб.н.тр.–Свердловск: УНЦ АН СССР.1982.– С.25-42.
7. Yugay, L.P. Linear Differential Evasion Game with Locally Inertial Controls. Bull. of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Math. CS. Mech. Series, №4, v.129,2019, – P. 54–66.

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ»,
ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ АКАДЕМИКА
А.В. КРЯЖИМСКОГО,

Москва, 23–24 января 2024 г.

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*

Напечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 19.03.2024 г.
Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л. 8,0.
Тираж 8 экз. Заказ № 008.

Издательство ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н